

第 10 章 静电场

电磁运动是物质的一种基本的运动形式,自然界里的所有变化,几乎都与电和磁相联系.电磁学就是研究电磁运动的基本规律及其应用的一门基础性学科.人类对电现象和磁现象的认识,从公元前六世纪就开始了,但电磁学的发展却是十分缓慢的.直到 19 世纪,由于生产和科学技术的迅速发展,电磁学才获得了重大进展.1820 年奥斯特发现了电流的磁效应,此后,安培又提出了分子电流假说,使人们认识到磁现象的本质是电荷的运动.1831 年法拉第发现了电磁感应的规律,使人们进一步认识到电磁现象的内在联系.到 19 世纪 80 年代,麦克斯韦在前人工作的基础上,把电磁规律归纳成麦克斯韦方程组,确立了电荷、电流、电场和磁场之间的普遍关系,建立了经典电磁场理论.

电磁学的内容按性质来分,主要有“场”和“路”两部分.作为非物理专业的一门基础课,电磁学这部分内容中学生的难点在于“场”.场具有空间分布,这样的对象(特别是非均匀场),从概念到方法,对学生来说都是新的.在这部分中有关矢量场的基本特征,大部分在前两章静电学中都可遇到.从这种意义上讲,静电学是整个电磁学的基础和重点,学好这两章,后面的困难就会小得多.面在学习静电学的内容时,应逐渐习惯于接受并使用“通量”和“环路”这类形式的定理,这对后面章节乃至其他课程的学习将大有裨益.

静电场是相对于观察者静止的电荷所产生的电场.本章只研究真空中静电场的性质和规律.

§ 10.1 电荷 库仑定律

一、电荷 电荷的量子化

人们对于电的认识最初来自摩擦起电.人们发现许多物质(如玻璃、硬橡胶、金刚石、蓝宝石和明矾等)经过毛皮或丝绸等摩擦后,都能吸引轻小物体,于是人们就

说它们带了电,或者说它们有了电荷.

实验发现,自然界中只存在两种性质不同的电荷,称为正电荷和负电荷.电荷与电荷之间存在相互作用(电相互作用比引力相互作用强得多,而且具有与引力相互作用根本不同的性质),同种电荷相互排斥,异种电荷相互吸引.而且,当异种电荷在一起时,它们的效应互相抵消.大多数物体是由等量的正电荷和负电荷组成的,称为电中性.因此,通常两宏观物体之间的电相互作用接近于零,从而它们之间的引力相互作用才显示出来.

物体所带电荷数量的多少,称为电量.如图 10.1 所示的验电器,是检测电荷和电量的最简单的一种仪器.在玻璃瓶等外壳上绝缘地安装一根金属杆,杆的上端有一金属球,下端有一对悬挂着的金属箔,一旦它们带电,“同种电荷互相排斥”这一性质就会使金属箔张开,所带的电荷越多,张角就越大.

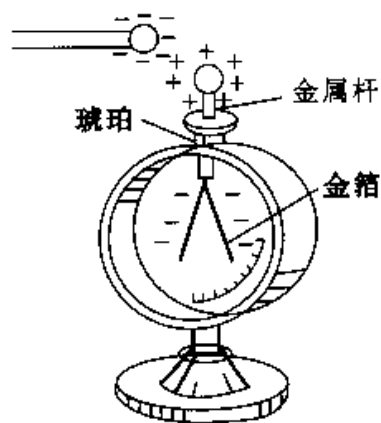


图 10.1

从验电器的实验可以看出,电荷可以从金属棒的一端移至另一端.这种允许电荷通过的物体称为导体,而不允许电荷通过的物体称为绝缘体或电介质.半导体是导电性质介于导体和绝缘体之间的、具有特殊电性质的材料.

物体具有不同的导电性,可以用物质的微观结构来解释.金属之所以导电,是因为组成金属的原子的最外层价电子,可以摆脱原子核的束缚而在金属中自由运动,称为自由电子;电解液之所以导电,是因为其内部存在许多可以作宏观运动的正、负离子.反之,在绝缘体内部,由于电子所受到的原子核的束缚较紧,基本上没有自由电荷,所以几乎不导电.在半导体中,通常把导电的粒子称为载流子,包括带负电的电子和带正电的空穴. O 型半导体中的多数载流子是电子, p 型半导体中的多数载流子是空穴.

密立根油滴实验和无数其他的实验表明,在自然界中,任何带电体的电量都只能是某一基本电荷 e 的整数倍.这个基本电荷就是一个电子所带的电量,叫做电子电量,记作 $-e$.质子的电量与电子电量等值异号,所以是 $+e$,其 1986 年推荐值为 $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ 库仑(C).因此可以把带电体的电量 q 写成

$$q = \pm ne$$

n 只能取正整数.显然,如果带电体上的电量发生变化,它也只能按电子电量的整数

倍变化,而不能任意变化.电荷的这一特点称为电荷的量子化.近代物理从理论上预言有一种电量为 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的基本粒子(称为夸克)存在,并认为质子和中子等许多粒子是由夸克组成的.但迄今为止,单独存在的夸克尚未在实验中发现.需要说明的是,在电磁学范围内所遇到的电量要比电子电量大很多,电荷的量子化是显示不出来的.

二、电荷守恒定律

两种材料的物体互相摩擦后之所以会带电,是因为通过摩擦,每个物体中都有一些电子获得能量脱离了原子束缚而转移到另一个物体上去.但是,不同材料的物体彼此向对方转移的电子数目往往不相等,所以从总体上讲,一个物体失去了电子而带正电,另一个物体得到了电子而带负电,这就是摩擦起电现象.如图 10.1 所示,当我们把带负电的物体移近导体时,导体中的自由电子在负电荷的排斥力作用下向远离带电体一端移动,结果导体的这一端因电子过少而带正电,另一端则因电子过多而带负电,这就是静电感应现象.由此可见,摩擦起电和静电感应现象中的起电过程,都是电荷从一个物体转移到另一个物体,或从物体的一部分转移到另一部分的过程.

大量的事实表明:电荷既不能被创造,也不能被消灭,只能从一个物体转移到另一个物体,或从物体的一部分转移到另一部分.也就是说,在一个与外界没有电荷交换的系统内,正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变,这称为电荷守恒定律.

近代科学实验证明,电荷守恒定律不仅在一切宏观过程中成立,而且被一切微观过程(例如核反应和基本粒子过程)所普遍遵守.电荷是在一切相互作用下都守恒的一个守恒量,电荷守恒定律是自然界中普遍的基本定律之一.

三、库仑定律

库仑定律是由法国科学家库仑,于 1875 年通过扭秤实验,直接测定两个静止点电荷之间的相互作用而总结出的定量规律.

1. 点电荷

实验发现,带电体之间具有相互作用力,而这种相互作用力和带电体间的距离以及所带的电量有关,同时与带电体的大小、形状以及电荷在带电体上的分布有关.但当带电体本身的几何线度比带电体间的距离小很多时,在测量的精度范围内,带电体的形状与其上的电荷分布对作用力没有影响,此时,作用力仅与带电体间的距

离以及所带的电量有关. 针对这样的事实, 我们引入点电荷的概念. 当带电体的大小和带电体间的距离相比小很多时, 我们把这样的带电体看作是点电荷. 点电荷与力学中的质点相似, 是从实际的带电体中抽象出来的, 只具有相对的意义, 它本身不一定是很小的带电体. 对于不能当作点电荷处理的带电体, 我们可以把它当作多个点电荷所组成的体系来处理.

2. 库仑定律

库仑定律的内容是: 在真空中, 两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与两电荷电量的乘积成正比, 与两电荷之间距离的平方成反比; 作用力的方向沿着两电荷的连线, 同号相斥, 异号相吸.

如图 10.2 所示, \hat{r}_{12} 表示从点电荷 q_1 指向点电荷 q_2 的单位矢量, 用 r 表示两电荷之间的距离, 于是, q_1 对 q_2 的作用力为

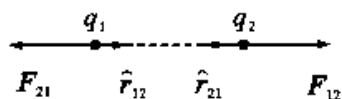


图 10.2

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (10-1)$$

式中 k 为比例系数. 在国际单位制中,

$$k = 8.98755 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

通常还引入另一常量 ϵ_0 来代替 k , 使

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

式中 ϵ_0 叫做真空电容率或真空介电常量.

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

于是真空中库仑定律就可以写成

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

当 q_1 与 q_2 同号时, 两者乘积为正, \mathbf{F}_{12} 与 \hat{r}_{12} 方向相同, 这是斥力; 当 q_1 与 q_2 异号时, 两者乘积为负, \mathbf{F}_{12} 与 \hat{r}_{12} 反向, 这是引力.

同理, q_2 对 q_1 的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \quad (10-2)$$

显然

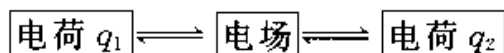
$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (10-3)$$

§ 10.2 电场强度

一、静电场

库仑定律揭示了电荷之间相互作用的规律,提供了定量计算静电力的基本方法.但是,并没有告诉我们电荷之间的相互作用是怎样传递的.力学中我们熟知的摩擦力、弹力都是接触力,但两个电荷并没有直接接触,那么,电荷之间存在的静电力是如何传递的呢?

对于电荷之间作用力的性质,历史上有过两种不同的观点.一种观点认为相隔一定距离的两个带电体之间的静电力是“超距作用”,它的传递既不需要媒质,也不需要时间.另一种是近距作用观点,认为静电力是物质间的相互作用,既然电荷 q_2 处在 q_1 周围任一点都要受静电力的作用,说明 q_1 周围整个空间存在着一种特殊的物质,它虽然不像实物那样由电子、质子和中子构成,但确实是一种客观实在;同样,电荷 q_2 在周围空间也存在这种特殊的物质,所以它们的作用才是相互的.我们把电荷周围存在的这种特殊的物质叫做电荷所激发的电场.因此,可以把电荷之间的相互作用过程归结为:电荷在周围空间激发电场,电场对位于其中的电荷施以作用力.若将两个电荷间的相互作用概括为一个图式,即为



可见,两个电荷之间的静电力实际上是每个电荷的电场作用在另一个电荷上的电场力.

当电荷静止不变时,从上述两种观点出发所做出的计算结果完全相同,不易判断哪一种观点正确.但当电荷运动变化时,两种观点的差别则非常明显.近代物理的理论和实验都证明,场的观点是正确的,“超距作用”的观点是错误的.变化的电磁场是以有限速度(光速)传播的,并且可以脱离场源而独立存在.电磁场与实物一样也具有能量、质量和动量.场是物质存在的一种形式,它既具有实物的一些基本属性,但与分子、原子等实物相比,也有其特殊之处,分子和原子等实物不具有空间叠加性,而场则具有空间叠加性,所以,我们称场为特殊的物质.

相对于观察者静止的电荷所激发的电场叫做静电场.从静电场的对外表现来看,它主要有以下几个方面的特性:

- (1) 电场对处在其中的电荷具有作用力；
- (2) 电场对在其中运动的电荷做功；
- (3) 电场对置于其中的导体和电介质将产生影响。

二、电场强度

对于电场来说,既看不见又摸不着,我们如何描述电场本身的物理性质呢?很显然,必须从电场所表现的外在特性方面来描述电场。

为了研究电场中各点的性质,引入试探电荷 q_0 ,它应满足两个条件:其一是它的电量必须足够小,以保证由于它的置入不引起原有电荷的重新分布;其二是它的线度必须小到可以被看作点电荷,以便确定电场中每点的性质。

实验表明,将试探电荷引入电场中后,它在不同位置上所受作用力 F 的大小和方向一般是不同的,并且 F 的大小与试探电荷的电量 q_0 成正比, F 的方向与试探电荷 q_0 的符号有关,但是 F 与 q_0 的比值 $\frac{F}{q_0}$,无论其大小和方向都与 q_0 无关,只与 q_0 所在处的电场状况有关,也就是说,在电场中某一确定点,试探电荷 q_0 所受的电场力与其电量的比值 $\frac{F}{q_0}$,反映了电场本身在该点的物理性质,而与所选的试探电荷无关,对于电场中不同点,这一比值 $\frac{F}{q_0}$ 一般不同,恰恰反映了电场固有属性的空间分布状况,因此,可以用比值 $\frac{F}{q_0}$ 来描述电场的性质,比值 $\frac{F}{q_0}$ 就称为**电场强度**,简称**场强**,用 E 表示,即

$$E = \frac{F}{q} \quad (10-4)$$

换言之,某处的电场强度定义为这样一个矢量,其大小等于单位电荷在该处所受到的电场力的大小,其方向与正电荷在该处所受到的电场力的方向一致,在国际单位制中,电场强度的单位是 N/C(牛顿/库仑)。

对于电场强度,要注意以下几点:

- (1) 并非一定要有单位电荷才能检验电场强度的大小。
- (2) 并非一定要有一个正电荷才能检验电场强度的方向。
- (3) 并非一定要有检验电荷才有场强,电场是客观存在的。

三、点电荷电场的电场强度

现在计算点电荷 Q 的电场分布. 以 Q 所在位置为原点, 在距离为 r 的场点 P , 放置一试探电荷 q , 根据库仑定律, q 受到的电场力为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (10-5)$$

所以 P 点的场强为

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (10-6)$$

上式常称为点电荷的场强公式. 其中 \hat{r} 为场点 P 相对于场源 Q 的位置矢量的单位矢量. 由上式可见, 点电荷电场有两个显著特点: (1) r 相同的点, 即在同一球面上的各点, F 的大小相等. (2) 各点场强的方向均沿径向: 当 $Q > 0$ 时, E 与 r 同向, E 沿径向外指; 当 $Q < 0$ 时, E 与 r 反向, E 沿径向内指, 即指向球心, 如图 10.3 所示. 可见点电荷电场具有球对称性.

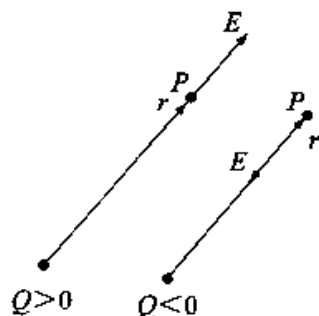


图 10.3

从场的观点来看, 点电荷 q 在场强为 E 的点处所受的电场力为

$$F = qE \quad (10-7)$$

四、场强叠加原理

在多个(设为 n 个)点电荷激发的电场中, 如何求场强呢? 根据力的加原理, 试探电荷在电场中某点, 受到各个点电荷对它的作用力之和为

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (10-8)$$

根据场强的定义, 若 n 个点电荷分别为 q_1, q_2, \cdots, q_n , 则

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n E_i \quad (10-9)$$

其中, $E_i = \frac{F_i}{q_0}$ 表示第 i 个点电荷单独存在时, 在该点产生的场强. 由此可见, 在多个点电荷所产生的电场中, 某点的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点产生的场强的矢量和, 这称为场强叠加原理.

从微观结构来看, 电荷集中在一个个带电的微观粒子上, 例如电子和原子核上.

但从宏观效果来看,在某些问题中可以把电荷看成是连续分布在带电体上.对于连续带电体,怎样应用场强叠加原理求其场强分布呢?

如图 10.4 所示,将带电体分割成许多微小的带电元 ΔV ,将每个带电元称为一个电荷元 Δq ,只要 ΔV 取得足够小,那么每个带电体又可以看作一个点电荷,这样,整体就可以看作是由许多电荷元所组成的点电荷体系.需要说明的是,从宏观上来看, ΔV 取得越小,即 $\Delta V \rightarrow 0$ 时,电荷元才越接近点电荷;从微观上看,电荷具有量子化特点,电荷又是一粒粒地分立分布

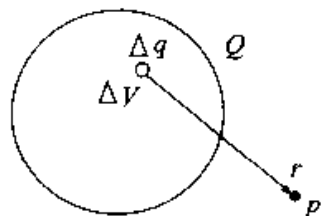


图 10.4 带电体的分割

状态,具有一定的分布起伏性.可见电荷元的体积 ΔV 又不能无限趋于零.在宏观电磁学范围内,对所取的电荷元应理解为:宏观小,微观大,既包含大量的带电粒子,以免造成微观起伏性,同时又满足点电荷模型的必要条件,这样的微元称为物理无限小体元.

现在将任意电荷元 Δq 以 dq 表示,场点 P 相对于该电荷元的矢径以 \vec{r} 表示,则电荷元 dq 在场点 P 所产生的场强为

$$\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (10-10)$$

在某些情况下,电荷分布在导体或电介质的表面附近很薄的一层里.当场点与薄层的距离远大于薄层的厚度时,可以忽略这个厚度而认为电荷分布在一个几何面上.这时,可以定义一点的面电荷密度或电荷面密度 σ 为该点附近单位面积内的电荷,即

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (10-11)$$

于是,带电面所激发的电场强度为

$$\mathbf{E} = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (10-12)$$

五、场强的计算

根据场强叠加原理,具体计算多个点电荷体系或电荷连续分布的带电体场强时,各个点电荷或电荷元在场点产生的场强 \mathbf{E} 或 $d\mathbf{E}$ 的大小和方向一般不同,不便于进行矢量加法或矢量积分运算.在处理具体问题时,先选取适当的坐标系,将 \mathbf{E} 或 $d\mathbf{E}$ 分解为各个坐标分量,以便将矢量运算变为简单的标量运算,求出总场强的各坐

标分量,然后再求总场强 E . 在三维直角坐标系 $oxyz$ 中,对多个点电荷体系,电场强度可表示为

$$E = xi + yj + zk$$

$$E_x = \sum E_{ix}, \quad E_y = \sum E_{iy}, \quad E_z = \sum E_{iz} \quad (10-14)$$

对于连续分布的带电体,有

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z \quad (10-15)$$

实际上是场强叠加原理的分量表示形式. 在有些问题中,电荷的分布具有某种对称性,这种对称性将影响场强的分布,往往使场强在某些方向互相抵消. 于是,可根据对称性直接判断在这些方向场强分量为零,从而减少不必要的计算.

例 10-1 求电偶极子的延长线和中垂线上的场强. 如图 10.5 所示,一对等量异号相距为 l 的点电荷,当从 l 的中点到场点的距离 r 远大于 l 时,这样的二点电荷体系叫做电偶极子.

解 (1) 电偶极子延长线上的场强如图所示,场点 P 在延长线上,它到 O 点的距离为 r . 根据点电荷的场强公式,正、负点电荷在 P 点的场强分别为 E_+ 和 E_- ,它们的大小不等,方向相反,且都在 OP 的连线上. 建立图示坐标系 $oxyz$,则电偶极子在延长线上的场强只有 x 分量,即

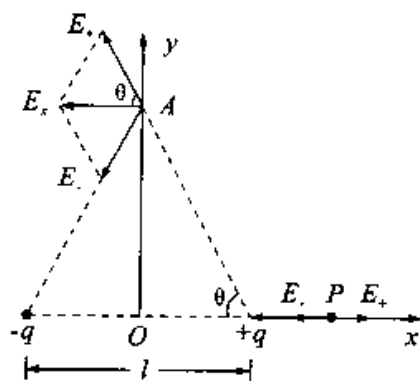


图 10.5 电偶极子的场强

$$E_{-x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_x = E_{-x} + E_{+x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3} (r \gg l) \quad (10-16)$$

$E_p = |E_x|$, E_p 沿 x 轴正方向.

(1) 电偶极子中垂线上的场强如图所示, 中垂线上任一点 A 到原点的距离为 r , 电荷 $+q$ 和 $-q$ 到 A 点的距离相等, 因此它们在 A 点产生的场强大小相等, 方向不同, 不能直接代数相加, 故 A 点场强的分量为

$$\begin{cases} E_x = E_{+x} + E_{-x} = -2E_s \cos\theta \\ E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0 \end{cases} \quad (10-17)$$

则 A 点的场强大小为

$$E_A = |E_x| = 2E_s \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} \quad (10-18)$$

E_A 的方向指向 x 轴负方向

讨论 电偶极子在远处的场强, 其大小与 r^3 成反比, 与 ql 成正比. 引入一个物理量 $P = ql$, 叫做电偶极矩, 通常采用矢量形式来表示电偶极矩. 即 $P = ql$, l 的方向由 $-q$ 指向 $+q$. 那么, 电偶极子在延长线和中垂线上的场强可表示为

在延长线上

$$E_p \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P}{r^3} \quad (10-19)$$

在中垂线上

$$E_A \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-P}{r^3} \quad (10-20)$$

例 10-2 均匀带电细棒的电场. 一长度为 L 的均匀带电细棒, 其电荷线密度为 λ , 试求距棒的垂直距离为 a 处的 P 点的场强.

分析 如图 10.6 所示, 以 P 点到直棒的垂足 O 为坐标原点, 建立 $O-xy$ 坐标系, 在棒上 y 处取线元 dy , 设 dy 到 P 点的距离为 r , 电荷元所带的电量 $dq = \lambda dy$, dq 在 P 点所产生的场强为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \hat{r}$$

各线元所对应的电荷元 dq 在 P 点产生场强的大小和方向各不相同, 求 P 点的场强 E , 用分量积分形式较为简便.

解 建立图示坐标系 $O-xy$, 电荷元 $dq = \lambda dy$ 在场点 P 处产生的场强 dE 与

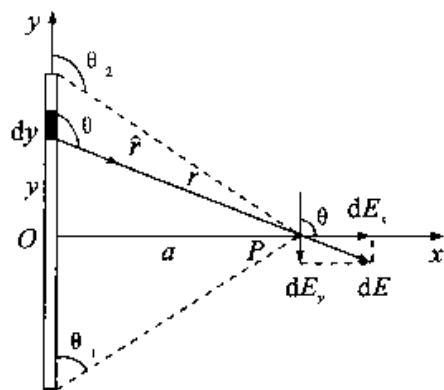


图 10.6

Y 轴正方向的夹角为 θ , 根据前述, dE 在 x 和 y 方向上的分量为

$$dE_x = dE \sin\theta = \frac{\lambda_e dy}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

$$dE_y = dE \cos\theta = \frac{\lambda_e dy}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

在以上两式中, 包含的变量有 r, θ 和 y , 实际上可以用其中一个变量来表示. 三个变量的关系为

$$r^2 = a^2 + y^2 = a^2 \cos^2\theta, y = -a \cot\theta$$

所以, $dy = a \csc^2\theta d\theta$. 那么, dE_x 和 dE_y 又可分别表示为

$$dE_x = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\theta d\theta, \quad dE_y = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta$$

对以上两式积分, 得

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{cases} \quad (10-21)$$

讨论 (1) 若 P 点位于带电细棒中垂线上, 则

$$\theta_2 = \pi - \theta_1, \quad \sin\theta_2 = \sin\theta_1, \quad \cos\theta_2 = -\cos\theta_1,$$

有

$$E_x = \frac{\lambda_e}{4\pi\epsilon_0 a} 2\cos\theta_1, \quad E_y = 0$$

即 E 只有 x 分量, 其大小为

$$E = |E_x| = \frac{|\lambda_e|}{2\pi\epsilon_0 a} \cos\theta_1$$

其方向在中垂面内沿径向, 当 $\lambda_e > 0$ 时, 沿径向外指; 当 $\lambda_e < 0$ 时, 沿径向内指, 即指向细棒.

(2) 若此均匀带电细棒为无限长, 则 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 可得

$$E_x = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0 a}, \quad E_y = 0$$

这说明, 无限长均匀带电细棒外任一点 P 的场强, 只有 x 分量, 其大小与 P 到棒的距离 a 成反比. 场强的分布具有轴对称性, 与细棒同轴柱面上各点的场强, 其大小处处相等, 场强的方向沿该点柱面的法线方向, 当 $\lambda_e > 0$ 时, 沿法向外指; 当 $\lambda_e < 0$ 时, 沿

法向内指. 如图 10.7 所示.

例 10-3 均匀带电圆环轴线上的电场. 设均匀带电圆环带电量为 q , 半径为 R , 求圆环轴线上一点 P 的电场强度.

分析 如图 10.8 所示, 在圆环上任一线元 dl , dl 上所带的电量为 $dq = \lambda_l dl$, 因为电荷均匀分布在圆环上, 电荷线密度为 $\lambda_l = \frac{q}{2\pi R}$, 该电荷元 dq 在 P 点产生的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_l dl}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{dl}{r^2} \hat{r}$$

在圆环上总可找到与对称的线元 dl' , 与之相对应的电荷元在 P 点产生的场强 dE' 与 dE 大小相等, dE' 和 dE 与轴线的夹角也相等, 二者在垂直于轴线方向的分量相互抵消, 在轴线方向的分量相同, 根据对称性可知, P 点的总场强只有轴向分量.

解 以圆心 O 为原点, 以轴线为坐标轴建立一维坐标系 $O-x$, P 点的坐标为 x , 电荷元 dq 在 x 点产生的场强的大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda_l dl|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{2\pi R} \frac{dl}{r^2}$$

dE 在 x 方向的分量为

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \frac{dl}{R^2 + x^2}$$

在上式中, 只有 l 是变量, 积分可得

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

所以, P 点场强的大小为

$$E_x = |E_x| = \frac{|q|x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10-22)$$

场强的方向沿轴向, 当 $q > 0$ 时, 沿轴向外指; 当 $q < 0$ 时, 沿轴向指向圆心.

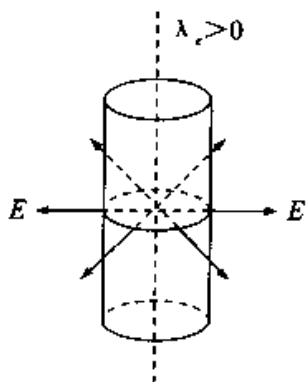


图 10.7 无限长均匀带电细棒的场强

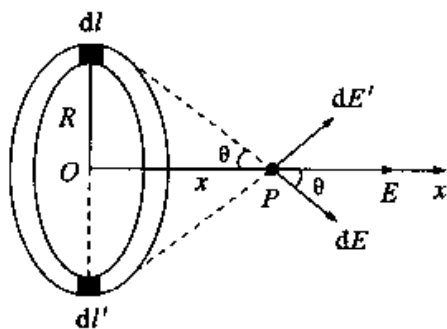


图 10.8 圆环轴线上的场强

讨论 (1) 当 $x = 0$ 时,即在圆心处, $E = 0$; (2) 当 $x \gg R$ 时,即离圆环很远处, $E_r = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 x^2}$,此时,整个圆环在轴线上产生的场强,相当于把电荷都集中在圆心处的点电荷 q 所产生的场强,即此时圆环可视为点电荷.

例 10-4 求均匀带电薄圆盘轴线上的场强分布. 设均匀带电薄圆盘带电量为 q , 半径为 R .

分析 如图 10.9 所示,将圆盘分割为许多同心环形窄带,当每个窄带宽度很小时,可视为细圆环. 整个带电圆盘在轴线上一点 P 所产生的总场强,可以看作无限多个窄圆环在该点产生的场强的叠加. 由于每个窄圆环在 P 点产生的场强方向相同,均沿轴线方向.

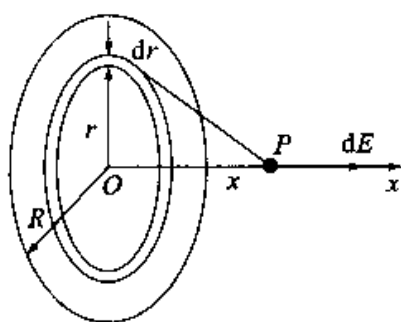


图 10.9 均匀带电薄圆盘轴线上的场强分布

所以总场强沿轴线方向.

解 如图 10.9 所示,以圆环中心为原点,以圆盘轴线为轴建立一维坐标系 $O-x$, 取半径为 r 、宽度为 dr 的任意环形窄带,该窄带所带的电量为 $dq = \sigma_e dS = \sigma_e 2\pi r dr$, 在 P 点产生的场强为 dE , dE 在 x 方向的分量为

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma_e x 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式中只有 r 一个变量,积分可得

$$E_x = \int dE_x = \int_0^R \frac{\sigma_e x 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

故轴线上任一点 P 的场强大小为

$$E = |E_x| = \frac{|\sigma_e|}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] \quad (10-23)$$

其中 σ_e 为电荷面密度. 场强的方向沿轴向,当 $\sigma_e > 0$ 时,沿轴向外指;当 $\sigma_e < 0$ 时,沿轴向且指向圆心.

讨论 (1) 当 $x \gg R$ 时,由于 $\sigma_e = \frac{q}{\pi R^2}$, 则

$$E = |E_x| = \frac{|\sigma_e|}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{1 + R^2/x^2}} \right]$$

根据牛顿二项式定理

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} = \left[1 + \left(\frac{R}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{x} \right)^4 - \dots$$

因 $x \gg R$, 即 $R/x \ll 1$, 略去 $(R/x)^4$ 以上的项, 得

$$E \approx \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

可见, 上式与点电荷场强公式一致. 只要 R/x 足够小, 就可足够精确地把带电圆盘看作点电荷. 这说明, 带电体能否被看作点电荷, 不在于本身的绝对大小, 而在于其线度与它到场点的距离相比是否足够小.

(2) 当 $R \gg x$ 时, 带电圆盘相对于 P 点可视为无限大带电平面. 则

$$E_r = \frac{\sigma_r}{2\epsilon_0}$$

这时, E_r 与场点 P 到无限大带电平面的距离 x 无关, E 的方向沿无限大带电平面的法线方向, 当 $\sigma_r > 0$ 时, 沿法向外指; 当 $\sigma_r < 0$ 时, 沿法向指向带电平面. 这说明, 无限大均匀带电平面周围空间的电场是匀强电场.

§ 10.3 静电场中的高斯定理

一、电力线

为了形象地描述电场在空间的分布, 引入电力线或电场线的概念. 电力线是按照下述规定在电场中画出的假想曲线:

(1) 曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向;

(2) 曲线的疏密表示场强的大小. 为了表示电场中某点场强的大小, 设想通过该点画一个垂直于电场方向的面元 dS_{\perp} , 如图 10.10 所示, 通过此面元画出 dN 条电力线, 使得

$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}$$

这就是说, 电场中某点电场强度的大小等于该点处的电力线条数密度(该点附近垂直电场方向的单位面积所通过的电力线条数).

图 10.11 画出了几种常见电场的电力线图. 由图所表

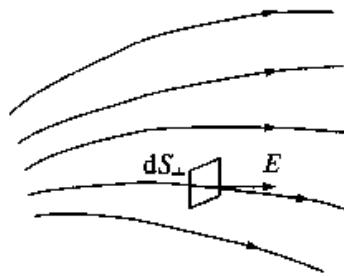


图 10.10 电力线

示的电力线分布情形,可以看出相应电场的分布情况.按上述严格规定所画出的静电场的电力线,必然具有如下性质:

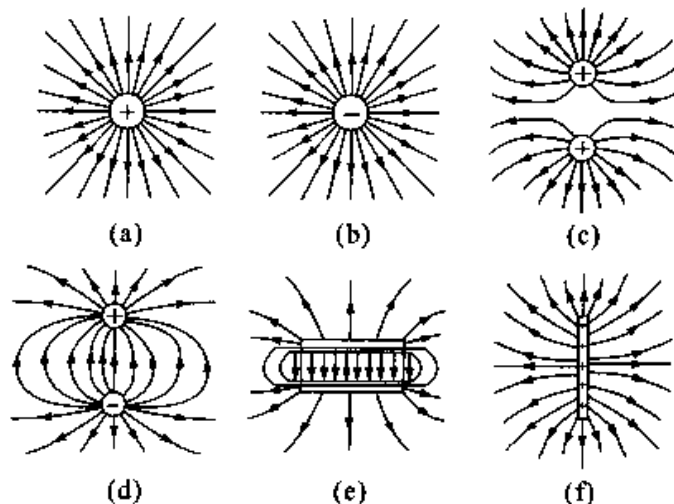


图 10.11 常见电场的电力线图

- (1) 电力线起自正电荷或无限远处,终止于负电荷或无限远处,在无电荷处不中断;
- (2) 两条电力线不相交;
- (3) 电力线不形成闭合曲线.

电力线是我们电场中引入的一些假想的曲线,其目的是为了直观地描述电场的一些性质.所以,电力线不是客观实在.电力线的性质,是我们规定了电力线的画法之后才具有的,它是电场本身性质的一种几何化的反映,因此,电力线的性质都可以由反映电场性质的定理来加以证明(见例题 10-9).

电力线可以借助于一些实验方法显示出来.例如,在水平玻璃板上撒些细小的石膏晶粒或在油上浮些草籽,它们就会沿电力线排列起来.

二、电通量

通量是描述矢量场性质的一个物理量.现在从电力线的概念出发引入电场强度 E 的通量的概念.如图 10.12 所示,以 dS 表示电场中某一设想的面元,通过此面元的电力线条数,定义为通过

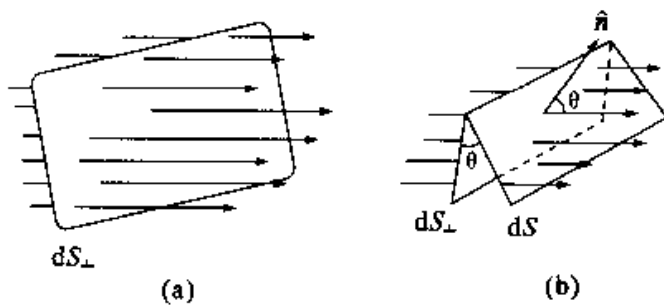


图 10.12 面元的电通量

这一面元的电通量,通常以 $d\Phi_e$ 表示,即

$$d\Phi_e = dN = EdS_{\perp} - EdS\cos\theta \quad (10-24)$$

为了同时表示出面元的方位,利用面元的法向单位矢量 \hat{n} ,将面元表示为矢量面元 $d\mathbf{S} = dS\hat{n}$.由图 10.12(b) 可以看出, $d\mathbf{S}$ 和 dS_{\perp} 的夹角也等于场强 \mathbf{E} 和法向单位矢量 \hat{n} 之间的夹角.由矢量点积的定义,可得

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \hat{n}dS = EdS\cos\theta$$

将此式与式(10-24)比较,可得用矢量点积表示的通过矢量面元 $d\mathbf{S}$ 的电通量的公式

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10-25)$$

由此式所决定的电通量 $d\Phi_e$ 是代数量,其正、负取决于场强 \mathbf{E} 与矢量面元 $d\mathbf{S}$ 的夹角 θ .当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时, $d\Phi_e > 0$;当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时, $d\Phi_e < 0$.

要求出通过任意不闭合曲面 S 的电通量,可将曲面 S 分割成许多小面元,先计算出通过每一小面元的电通量,然后整个 S 面上所有面元的电通量相加,用数学式表示为

$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10-26)$$

上式表明,通过任一有限曲面 S 的电通量,等于电场强度 \mathbf{E} 在整个曲面上的一个面积分,如图 10.13 所示.在匀强电场中,通过一平面 S 的电通量,上述积分变得比较简单,即

$$\Phi_e = ES\cos\theta = ES\cos\theta$$

特别是, \mathbf{E} 与 \hat{n} 方向一致时, $\theta = 0$, $\Phi_e = ES$;当 \mathbf{E} 与 \hat{n} 方向相反时, $\theta = \pi$, $\Phi_e = -ES$,当 \mathbf{E} 与 \hat{n} 垂直时, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\Phi_e = 0$.

在式(10-24)中,曾借助于穿过面元 dS 的电力线条数来定义通过该面元的电通量,这仅仅是为了使电通量的概念形象化.在计算电通量的数值时,若使用电力线的概念,必须注意,当电力线顺着所选定的曲面法向 \hat{n} ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$) 时,通量为正;当电力线逆着曲面法

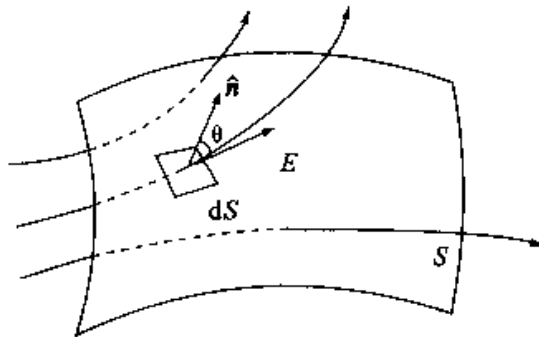


图 10.13 不闭合曲面的电通量

向 \vec{n} ($\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$) 时, 通量为负.

通过一个闭合曲面 S 的电通量(图 10.14) 可表示为

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (10-27)$$

积分符号 \oiint 表示对整个闭合曲面进行积分. 对于不闭合的曲面, 面上各处法向单位矢量的正向可以任意取这一侧或那一侧. 对于闭合曲面, 由于它把整个空间划分成内、外两部分, 所以我们常规定: 法向单位矢量 \vec{n} 的正方向为垂直于曲面, 指向闭合曲面的外侧. 式(10-27) 中, 各面元的法向单位矢量 \vec{n} 的正方向均为外法线方向. 因此, 当电力线由里向外穿出, 其电通量为正; 当电力线由外向里穿入, 其电通量为负. 如图 10.14 所示, 电力线从 dS_1 处穿出, $d\Phi_e$ 为正; 电力线从 dS_2 处穿入, $d\Phi_e$ 为负. 由此可知, 通过整个闭合曲面的电通量, 等于各个面元电通量的代数和. 电通量 $\Phi_e < 0$, 说明净穿出闭合曲面的电力线条数为 $|\Phi_e|$; 电通量 $\Phi_e > 0$, 说明净穿入闭合曲面的电力线条数为 $|\Phi_e|$.

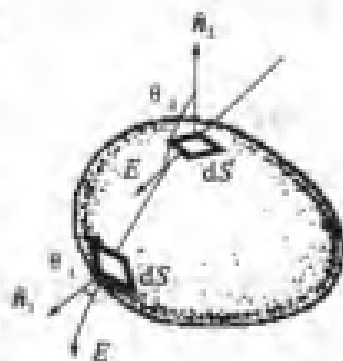


图 10.14 闭合曲面的电通量

三、高斯定理

高斯定理是关于任意闭合曲面的电通量和面内净余电荷关系的重要定理, 它深刻地反映了电场和场源的内在联系, 揭示了静电场的性质, 是静电场的基本场方程之一.

静电场的高斯定理可以表述为: 通过静电场中任意闭合曲面 S 的电通量 Φ_e , 等于该曲面所包围的电荷的代数和 $\sum q_n$ 除以 ϵ_0 , 与闭合面外的电荷无关, 即

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q \quad (10-28)$$

这里的 S 通常是一个假想的闭合曲面, 习惯上叫做高斯面.

静电场的高斯定理是反映静电场性质的普遍原理, 它可以由库仑定理和场强叠加原理导出. 下面我们从特殊到一般, 分几步来证明静电场的高斯定理.

(1) 包围点电荷 q 的同心球面 S 的电通量等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$

以点电荷为中心作半径为 r 的球面, 如图 10.15 所示, 根据库仑定律, 在球面上

各点场强大小相等,方向沿半径向外呈辐射状.在球面上任意取一面元 dS ,其外法向单位矢量 \hat{n} 沿半径方向向外,即 \hat{n} 与 E 之间的夹角 $\theta = 0$,所以 dS 的电通量为

$$d\Phi_e = E \cdot dS = EdS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$

整个闭合球面的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S d\Phi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

由此可见,闭合球面的电通量只与点电荷的电量有关,而与所取高斯面的半径 r 无关.

(2) 包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S 的电通量都等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$

为了把结论(1)推广到任意曲面,我们需要借助立体角的概念.设想有一个任意闭合曲面 S 包围点电荷 q ,在 S 面上任取一面元 dS ,如图 10.16(a) 所示.若面元 dS 的外法向 \hat{n} 与矢量 E 之间的夹角为 θ ,则 $dS' = dS \cos\theta$ 是面元 dS 在垂直于矢径方向上的投影面积,它是以 q 所在处 O 点为中心,以 r 为半径的球面上的面元.如图 10.16(b) 所示,由 dS' 的边缘各点到球心 O 的连线所构成的锥体的顶角,称为面元 dS' 或 dS 对 O 点所张的立体角,用 $d\Omega$ 表示.仿照用弧度来量度平面角的办法,我们用球面元 dS' 的面积与半径 r 的平方之比,来量度它对球心所张的立体角 $d\Omega$ 的大小,这种量度方法所用的单位叫做球面度.于是,面元 dS 或 dS' 对 O 点所张的立体角为

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} \quad (10-29)$$

可以证明,任一闭合曲面对于面内任一点所张的立体角都等于 4π ,即

$$\oint_S d\Omega = 4\pi$$

利用电通量的定义式(10-25),面元 dS 或 dS' 的电通量为

$$\begin{aligned} d\Phi_e &= E \cdot dS = EdS \cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned} \quad (10-30)$$

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

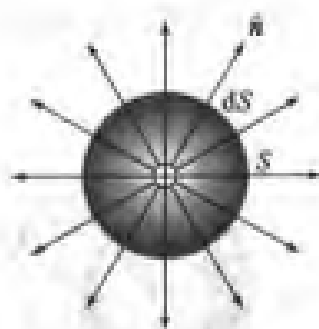
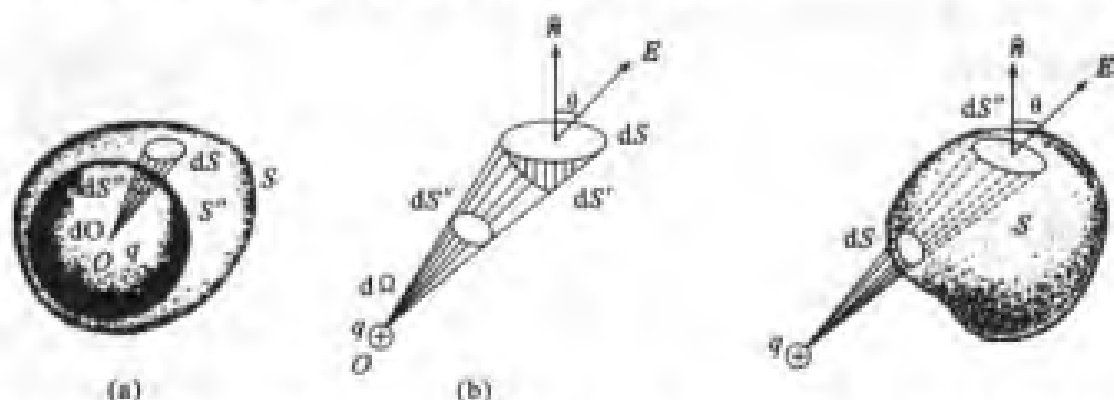


图 10.15 包围 q 的同心球面的电通量

(3) 不包围点电荷的任意闭合面 S 的电通量恒为零

 图 10.16 包围 q 的任意闭合面的电通量 图 10.17 不包围 q 的任意闭合面的电通量

如图 10.17 所示,当点电荷在闭合面之外时,由于单个点电荷产生的电力线是辐射状的直线,从某个面元 dS 上进入闭合面的电力线必然从另外一个面元 dS' 上穿出。显然,这一对面元 dS 和 dS' 对点电荷所张的立体角数值相等,根据式(10-30), dS 的电通量 $d\Phi$ 和 dS' 的电通量 $d\Phi'$ 数值相等,符号相反,它们的代数和 $d\Phi + d\Phi' = 0$ 。由于整个闭合面 S 的电通量 Φ ,是这样一对对面元的电通量之和,当然也是等于零的。

(4) 多个点电荷体系的电场对任意闭合曲面的电通量对于多个点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots, q_m$ 组成的电荷系来说,在它们的电场中,任意一点的场强为

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots + E_m$$

其中 $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ 分别为 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 单独产生的场强, E 为总场强。若取任意闭合曲面 S ,使它包围电荷 q_1, q_2, \dots, q_n ,另有 $n-m$ 个电荷在闭合面外,如图 10.18 所示,通过闭合曲面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \oiint_S E \cdot dS \\ &= \oiint_S E_1 \cdot dS + \oiint_S E_2 \cdot dS + \dots + \oiint_S E_n \cdot dS + \dots + \oiint_S E_m \cdot dS \\ &= \Phi_{s1} + \Phi_{s2} + \dots + \Phi_{sn} + \dots + \Phi_{sm} \end{aligned}$$

根据单个点电荷电场的情况可知 $\Phi_{s1} = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \Phi_{s2} = \frac{q_2}{\epsilon_0}, \dots, \Phi_{sm} = \frac{q_m}{\epsilon_0}$; 而 $\Phi_{s, n+1} = 0, \dots, \Phi_{sm} = 0$ 。由此可以得出,通过闭合面 S 的电通量为

$$\Phi_s = \oiint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_N$$

证毕.

关于高斯定理,我们作如下说明:

(1) 高斯定理是静电场的基本定理之一. 高斯定理和库仑定律可以互相推导,都可以作为静电学的基础. 从这一点来看它们是等价的. 但是,对于运动电荷产生的电场以及迅变的电磁场来说,库仑定律不再成立,高斯定理却仍然有效,所以高斯定理比库仑定律应用更广泛,意义更深刻.

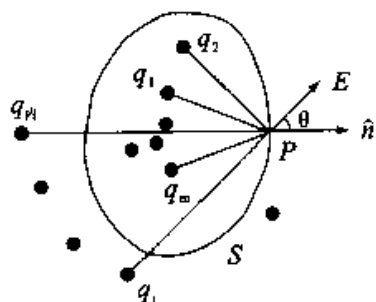


图 10.18 点电荷系电场中任意闭合面的电通量

(2) 通过闭合曲面的总电通量只与闭合面所包围的净电荷有关,也就是说,总电通量与闭合面内的电荷如何分布无关,与闭合面的形状无关,与闭合面外的电荷无关.

(3) 求电通量时所涉及的电场强度,是闭合面上各点的场强,它是由闭合面内外所有电荷共同产生的,它与闭合面内外所有电荷以及电荷的分布都密切相关.

四、应用高斯定理求场强

高斯定理和库仑定律用不同的形式表示出电场与场源电荷关系的同一客观规律,但它们在应用上有所不同. 一般说来,库仑定律和场强叠加原理并用,解决已知电荷分布求场强的问题. 而高斯定理则解决已知场强分布求任意区域内的电荷问题. 尽管如此,当电荷分布具有某种对称性时,适当选取高斯面,也可用高斯定理求出这种电荷系统的电场强度分布,而且,这种方法往往比用库仑定律和场强叠加原理要简便得多. 静电场的高斯定理更重要的意义在于,它是静电场的两个基本定理之一,它与静电场的环路定理结合起来,可以完整地描述静电场. 应用高斯定理求场强分布,关键在于,根据电荷分布的对称性分析场强分布的对称性,巧妙地选取合适形状的高斯面,以便使积分 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 中的 \mathbf{E} 能以标量形式从积分号内提出来,再利用高斯定理计算出场强的数值.

例 10-5 求均匀带电球壳内、外的场强. 设球壳的半径为 R , 带的总电量为 Q .

分析由于电荷均匀分布在球壳上,电荷的分布具有球对称性,因此,电场也应具有以球壳的球心为中心的球对称性. 也就是说,同一球面上各点的场强 \mathbf{E} 的大小应处处相等, \mathbf{E} 的方向必沿该点球面的法线方向,据此可以选取与带电球壳同心的球面作为高斯面.

解 如图 10.19 所示,取球壳外一点 P ,到球心的距离为 s ,以 O 点为中心,以 r 为半径作高斯面 S , P 点为高斯面上一点.根据电通量的定义,有

$$\Phi_e = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E \cos\theta dS = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

根据高斯定理 $\Phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0}$,所以 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,考虑到场强的方向,则

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (r > R)$$

在球壳内,任取一点 P' , P' 到 O 点的距离 s' ,以 r 为半径作高斯面 S' , P' 点在高斯面 S' 上,同理可得

$$\Phi_e = \oiint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

根据高斯定理 $\Phi_e = 0$,所以

$$E = 0 (r < R)$$

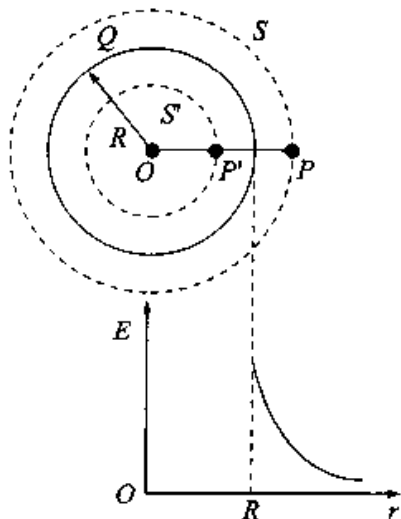


图 10.19 球壳的场强分布

结论 均匀带电球壳在外部空间产生的电场,与电荷全部集中在球心时产生的电场一样;均匀带电球壳内部的场强处处为零.图 10.19 中的 $E-r$ 曲线,表明了场强大小随距离的变化情况.

例 10-6 求均匀带电球体内、外的场强.设球体的半径为 R ,带电量为 Q .

分析 与上例一样,电荷电布具有球对称性,电场的分布也具有球对称性.

解 过球外 P 点取球形高斯面 S ,球面半径 $r \geq R$.由高斯定理可得

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} (r \geq R)$$

过球内 P' 点取球形高斯面 S' ,其半径 $r < R$,通过高斯面 S' 的电通量为

$$\Phi_e = \oiint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

由高斯定理可得

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho V = \frac{Q}{\epsilon_0 (4/3)\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q r}{R^3} \hat{\mathbf{r}} (r \leq R)$$

即在球内部, E 与 r 成正比.图 10.20 中的 $E-r$ 曲线给出了在球内、外场强大小随距离的变化情况.

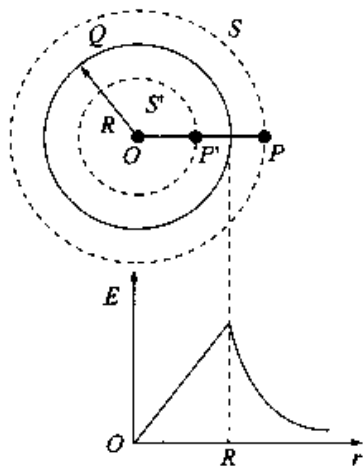


图 10.20 球体的场强分布

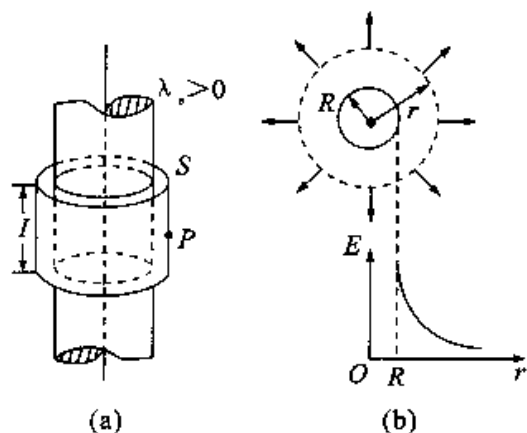


图 10.21 圆柱面的场强

例 10-7 求无限长均匀带电圆柱面内外的电场. 设圆柱面的半径为 R , 沿轴向单位长度圆柱面上所带的电量为 λ_e .

分析 由于电荷分布具有轴对称性, 电场分布也具有轴对称性, 即离开圆柱面轴线等距离各点的场强大小处处相等, 方向都沿柱面的法线方向, 所以可以选取同轴的柱形高斯面. 在柱形高斯面的两个底面上, 虽然场强的大小各处不等, 但场强的方向则处处与底面的法向垂直, 底面上每个面元的电通量 $E \cdot dS = 0$, 所以通过两个底面的电通量均为零.

解 柱面外的场强分布: 如图 10.21 所示, 在柱面外取一点 P , P 点到柱面轴线的距离为 r , 以 r 为半径, 作长度为 l 的同轴柱形高斯面 S , P 点在高斯面上. 通过高斯面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{\text{上底}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{\text{下底}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{S_{\text{侧}}} E \cos\theta dS + \iint_{S_{\text{上底}}} E \cos\theta dS + \iint_{S_{\text{下底}}} E \cos\theta dS \\ &= \iint_{S_{\text{侧}}} E dS = E \iint_{S_{\text{侧}}} dS = 2\pi r l E \end{aligned}$$

根据高斯定理, $\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} \sum \{q_{\text{内}}\} = \lambda_e l / \epsilon_0$, 故带电柱面外的场强

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (r > R)$$

柱面内的场强分布: 仿照前述分析, 取 $r < R$ 的柱形高斯面, 其电通量为 $\Phi_e = 2\pi r l E$, 根据高斯定理, 有 $\Phi_e = 0$, 所以

$$E = 0 \quad (r < R)$$

例 10-8 均匀带电的无限大平面薄板的面电荷密度为 σ_c , 求其场强分布.

分析 由于电荷均匀分布在无限大的平面上, 因此电场的分布具有面对称性. 若设 $\sigma_c > 0$, 则平面两侧对称点处的场强不仅大小相等, 而且方向处处与平面垂直并指向两侧. 如图 10.22 所示, 可取高斯面为一个柱体的表面, 其侧面与带电面垂直, 两底面与带电面平行并在对称位置上. 由于该高斯面是关于带电平面对称的, 在两底面处, 场强的大小处处相等, 方向沿两底面的法向, 侧面上各点的场强方向处处与侧面法向垂直, 通过侧面的电通量为零.

解 取如图 10.22 所示的高斯面, 通过高斯面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{侧}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{右底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{左底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{S_{右底}} E dS + \oiint_{S_{左底}} E dS = E\Delta S + E\Delta S = 2E\Delta S \end{aligned}$$

由高斯定理知, $\Phi_e = \sum \{q_{内}/\epsilon_0\} = \sigma_c \Delta S / \epsilon_0$, 所以

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_c}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

这一结果与本章例题 4 结果完全一样. 无限大均匀带电平面周围空间的电场是匀强电场. 上述各例中, 带电体的电荷分布都具有某种对称性, 利用高斯定理计算这类带电体的场强分布是很方便的. 不具有特定对称性的电荷分布, 其电场强度不能直接用高斯定理求出. 当然, 这决不是说, 高斯定理对这些带电体系的电场不成立. 此外, 对有些带电体系来说, 如果其中每个带电体的电荷分布都具有对称性, 那么可以利用高斯定理求出每个带电体的电场, 然后再应用场强叠加原理求出整个带电体系的电场分布. 读者在后面学习中将遇到这类情况.

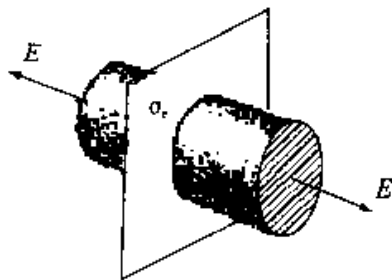


图 10.22 无限大平面的场强

§ 10.4 静电场的环路定理

前面从静电场对电荷有作用力的特性, 引入电场强度来描述静电场, 高斯定理从一个侧面反映了静电场是有源场这一重要性质. 本节从静电场力做功的特点出发来描述静电场的性质. 静电场力做功与路径无关这一特点可以等价于静电场的环路

定理,它从另一个侧面说明静电场是有势场这一重要性质.在此基础上,引入电势的概念来描述静电场.

一、静电场力的功

根据库仑定律和场强叠加原理,可以证明静电场力做功与路径无关.

1. 单个点电荷的电场

设静止的点电荷 q 位于 O 点.如图 10.23 所示,设想在 q 产生的电场中,把一试探电荷 q_0 由 a 点沿任意路径移动到 b 点,现在来计算 q 的电场对试探电荷 q_0 所做的功 A_{ab} .

当 q_0 移动一个元位移 dl 时,电场力所做的元功为

$$dA = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = F \cos \theta dl = F dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

电场力所做的总功为

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right]$$

由此可以得出结论:在点电荷的电场中,电场力对试探电荷所做的功与路径无关,只与试探电荷起点和终点的位置有关.

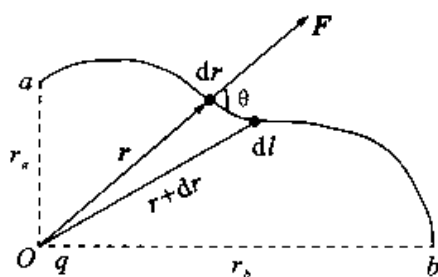


图 10.23 静电场力做功

2. 任意带电体系的电场

我们可以把带电体划分为许多带电元,每一带电元都可以看作是一个点电荷.于是,可以把带电体系看成点电荷系,总场强 \mathbf{E} 是各点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ 分别单独产生的场强 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \dots, \mathbf{E}_n$ 的矢量和,从而当试探电荷 q_0 从 a 点沿曲线移到 b 点时,电场力所做的功为

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + q_0 \int_a^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots$$

此式中,每一项代表一个点电荷单独存在时的电场力将 q_0 从 a 移动到 b 所做的功.因为每一项都与路径无关,所以总电场力的功 A_{ab} 也必定与路径无关.于是得出结论:在任意静电场中,电场力对试探电荷所做的功,只与试探电荷的电量和起点、终点的位置有关,与路径无关.由此可知,静电场力是保守力,静电场是保守力场或有势场,也称有位场.

二、静电场的环路定理

静电场的环路定理可以表述为:静电场中电场强度 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的线积分

等于零. 电场强度 E 沿任意闭合路径的线积分又叫做 E 的环流, 因此也可以说静电场中电场强度 E 的环流等于零, 公式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (10-31)$$

这个定理可以从静电场力做功与路径无关的结论导出. 如图 10.24 所示, 在静电场中任意取一闭合环路 L . 考虑场强沿此闭合路径的线积分 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. 先在环路 L 上取任意两点 P 和 Q , 它们把环路 L 分成 L_1 和 L_2 两段. 由于静电场力做功与路径无关, 因此有

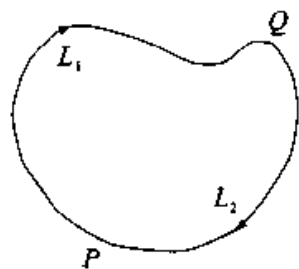


图 10.24 环路定理

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{L_1}^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{aligned}$$

反过来, 由环路定理也可以导出电场力做功与路径无关的结论. 因此, “场强沿任意闭合路径的线积分等于零” 和 “电场力做功与路径无关” 这两种说法是完全等价的.

例 10-9 试证明电力线所具有的三个性质.

证明 (1) 如果我们作一小闭合面分别将电力线的起点和终点包围起来, 则必然有电通量从前者穿出 ($\Phi_e > 0$), 从后者进入 ($\Phi_e < 0$). 因此, 根据静电场的高斯定理, 在前者之内必有正电荷, 在后者之内必有负电荷. 换言之, 电力线不会在没有电荷的地方中断. 因此, 静电场的高斯定理可理解为, 从每个正电荷 q 发出 q/ϵ_0 根电力线, 有 q/ϵ_0 根电力线终止于负电荷 q . 如果在带电体系中有等量的正、负电荷, 电力线就从正电荷发出到负电荷终止; 若正电荷多于负电荷, 则从多余的正电荷发出的电力线就只能延伸到无穷远处去; 反之, 若负电荷多于正电荷, 则终止于多余的负电荷的电力线就只能来自无穷远处.

(2) 如果两条电力线相交, 则交点处同时有两个场强矢量, 这就破坏了场强的单值性, 是不允许的. 因此, 两条电力线不会相交.

(3) 先假设存在闭合的电力线, 则沿此闭合电力线的环路积分 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_L E dl \cos\theta$ 中的 $\cos\theta$ 必等于 1, 即各段上的 $E dl \cos\theta = E dl$ 总是正的, 整个环路积分的

数值就不可能等于 0, 这是与静电场的环路定理相矛盾的. 所以, 关于存在闭合的电力线的假设是不正确, 即静电场中的电力线不可能是闭合线.

§ 10.5 电 势

一、电势能

静电力和重力一样, 都是保守力, 静电场和重力场都是有势场或有位场. 因此, 可仿照重力势能的概念, 在静电场中引入电势能或电位能的概念.

在静电场中, 把试探电荷 q_0 由一点移动到另一点, 电场力所做的功与路径无关, 所以在静电场中也存在一个由 q_0 和场源电荷的相对位置所决定的能量, 称为电势能或电位能, 用 W 表示. 电势能的增量等于试探电荷 q_0 由初位置 P 沿任意路径到末位置 C 的过程中电场力对 q_0 做功的负值, 即

$$W_C - W_P = - \int_P^C q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

或
$$W_P - W_C = \int_P^C q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (10-32)$$

此式表明, 在静电场中, 试探电荷 q_0 在始末位置的电势能之差, 等于将该电荷从始位置 P 点沿任意路径移动到末位置 C 点的过程中电场力所做的功.

电势能是一个相对量, 要确定 q_0 在电场中某点的电势能值, 必须选定参考点, 并规定参考点的电势能值. 若选定 C 点为参考点, 令 $W_C = 0$, 则 P 点的电势能为

$$W_P = \int_P^C q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (10-33)$$

此式表明, 电荷 q_0 在电场中任一点 P 的电势能, 在数值上等于将此电荷从 P 点沿任意路径移动到参考点的过程中电场力所作的功.

二、电势与电势差

在参考点选定之后, 电荷 q_0 在电场中任一确定位置, 都有一个确定的电势能值 W , 显然, 电荷 q_0 在电场中任一点 P 的电势能 W_P , 是由 q_0 和场强 E 的分布共同决定的. 不只是依赖于电场的分布, 因此不能用电势能 W 来描述电场本身的性质. 但是, 比值 W_P/q_0 却与 q_0 无关, 只决定于电场的分布, 我们把这个比值 W_P/q_0 叫做 P 点的

电势或电位,以 U_P 来表示,则

$$U_P = W_P/q_0 = \int_P^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (10-34)$$

即电场中某点的电势,在数值上等于单位正电荷在该点的电势能,或等于将单位正电荷从该点移到参考点过程中,电场力所做的功. 电场中任意两点的电势差可定义为

$$U_{PC} = U_P - U_C = \frac{W_P}{q_0} - \frac{W_C}{q_0} = \int_P^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (10-35)$$

即静电场中,任意两点 P, C 的电势差,等于把单位正电荷从 P 点沿任意路径移到 C 点过程中,电场力所做的功.

电场中某点的电势,实际上是该点与参考点之间的电势差,显然,这也就意味着把该参考点的电势指定为零. 电势能只具有相对意义,因而从原则上来说,参考点的选取是任意的. 但是为了计算简便,同时保证电势的概念不失去其物理意义,对参考点的选择通常为:

(1) 如果场源电荷分布在有限区域内,通常选取无穷远处为参考点,即 $U_\infty = 0$. 这时任一点 P 的电势公式可写成

$$U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (10-36)$$

(2) 如果电荷分布到无限远处,如无限长带电直线、无限大带电平面和无限长带电柱面等,一般不能选无穷远处作参考点,否则场中电势的值将为无穷大或不确定,这时电势就失去了描述电场性质的物理意义. 在这种情况下,一般把参考点选在有限区域内. 对无限长带电直线、无限长带电柱面和无限大带电平面,参考点一般选在带电线、带电面或它们的轴线上,这样计算比较简便.

(3) 在电工学中,常把大地或仪器机壳选为电势参考点. 电势差是绝对量,与参考点的选择无关. 电势是相对量,只有选定了参考点之后,电势才有确定的意义. 根据电势差的数值,可以比较电场中两点间的电势高低,由 P 点到 C 点,电场力对单位正电荷做正功, $U_{PC} > 0$, 则 $U_P > U_C$; 电场力对单位正电荷做负功, $U_{PC} < 0$, 则 $U_P < U_C$.

在国际单位制中,电势和电势差的单位都是伏特,即 1 伏特(V) = 1 焦耳每库仑(J/C).

三、电势叠加原理 电势的计算

利用电势的定义,可以求出点电荷 q 在电场中任一点 P 的电势.

点电荷是一个有限带电体,故可选取无穷远为电势零点. 因为电势的计算与路径无关,所以可选取一条最便于计算的路径,即沿径向的直线作为积分路径,于是有

$$U_P = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

式中 r 是从点电荷 q 到 P 点的距离. 即点电荷的电势公式为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (10-37)$$

当 $q > 0$ 时, $U > 0$, 空间各点的电势都是正的,且距正电荷越近处,电位就越高; 当 $q < 0$ 时, $U < 0$, 空间各点的电势都是负的,且距负电荷越近处,电势就越低.

假若空间中有多点电荷,根据场强叠加原理,电场中某点的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{\infty} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_P^{\infty} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \cdots + \int_P^{\infty} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{r_n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} = \sum_{i=1}^n U_i \end{aligned} \quad (10-38)$$

这一结果表明,在点电荷系的静电场中某一点的电势,等于各个点电荷单独存在时在该点产生电势的代数和. 这个结论叫做电势叠加原理.

要求电荷连续分布的带电体电场中某一点的电势,对于有限带电体来说,取无穷远处为电势零点,将带电体分割为许多可以视为点电荷的电荷元所组成的体系,任意电荷元 dq 在任一点 P 的电势,可用点电荷的电势公式来计算,即 $dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$, 整个带电体电场在 P 点的电势等于所有电荷元在该点电势的代数和,即

$$U = \int dU = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (10-39)$$

上式的积分遍及整个带电体.

当电场中的电场强度分布为已知,或者电荷分布具有特定的对称性,其场强分布易于确定时,可直接利用电势的定义式(10-34)来计算电势.

当电荷在有限区域内分布为已知时,原则上都可以用以点电荷电势公式为基础

的电势叠加原理,即式(10-39)来计算电势.此外,对于多个带电体的电场,可以分别计算出每个带电体在同一点的电势 U_1, U_2, \dots, U_n ,然后求其代数和,便得多个带电体的总电场在该点的电势,即

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (10-40)$$

其中, U_1, U_2, \dots, U_n 均相对于同一参考点.

例 10-10 如图 10.25 所示,四个点电荷 q_1, q_2, q_3, q_4 分别放在一正方形的四个顶角上,各顶角到正方形中心的距离为 r ,求

当 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ 时,中心 O 点的电势 U_0 ;

当 $q_1 = -q_2 = -q_3 = q_4 = q$ 时, O 点的电势 U_0 .

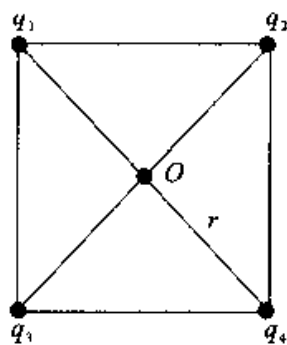


图 10.25 点电荷系的电势

解 (1) 取 $U_\infty = 0$,由电势叠加原理,可求出 O 点的电势

U_0 为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 同理可得, O 点的电势 U_0 为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = 0$$

例 10-11 求均匀带电圆环轴线上任一点的电势.已知环的半径为 R ,带电总量为 q .

分析 电荷均匀分布在圆环上,可利用电荷连续分布时的电势叠加原理来计算轴线上任意一点的电势.由于所求的是轴线上任一点的电势,我们曾经计算出轴线上的场强分布,所以,也可以利用对场强 E 的线积分来计算电势.

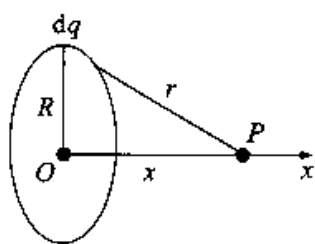


图 10.26 带电圆环轴线上的电势

解法一用电势叠加原理计算.取无穷远处为电势零点,即 $U_\infty = 0$.如图 10.26 所示,设 P 点为圆环轴线上任一点,它到环心 O 的距离为 x .将圆环分割成许多小段,取其任一小段 dl ,它所带的电量 $dq = \lambda dl$,其中 $\lambda = q/2\pi R$,该电荷元 dq 在 P 点的电势为

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \frac{q}{2\pi R} dl$$

由电势叠加原理可得 P 点的电势为

$$U = \int dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

若 P 点距 O 点极远, 即 $x \gg R$, 则 $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$, 此时圆环可以看成是点电荷. 当 P 点位于环心 O 时, $y=0$, 则

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

若 P 点距 O 点极远, 即 $x \gg R$, 则 $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$, 此时圆环可以看成是点电荷. 当 P 点位于环心 O 时, $x = 0$, 则

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$$

解法二 用对场强的线积分来计算.

取无穷远处为电势零点, 即 $U_\infty = 0$. 因为轴线上任一点的场强为

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

根据电势的定义, 沿 x 轴对场强作线积分, 便可得到 P 点的电势为

$$U = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_x^\infty E_x dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_x^\infty \frac{x dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

两种方法的计算结果完全相同.

例 10-12 求均匀带电球壳的电场中的电势分布. 已知球壳的半径为 R , 带电量为 Q .

解 取无穷远处为电势零点, 即 $U_\infty = 0$. 根据高斯定理, 求出场强的分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & (r > R) \end{cases}$$

根据电势的定义, 如图 10.27 所示, 球面外一点 P 的电势为

$$U = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (r > R)$$

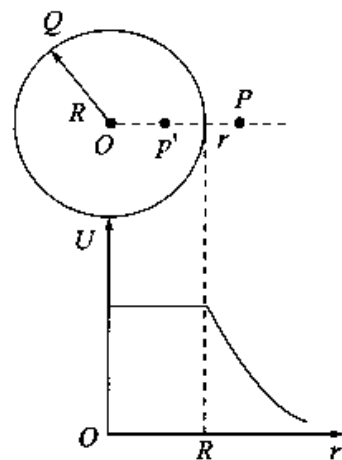


图 10.27 电势的分布曲线

球面内一点 P' 的电势为

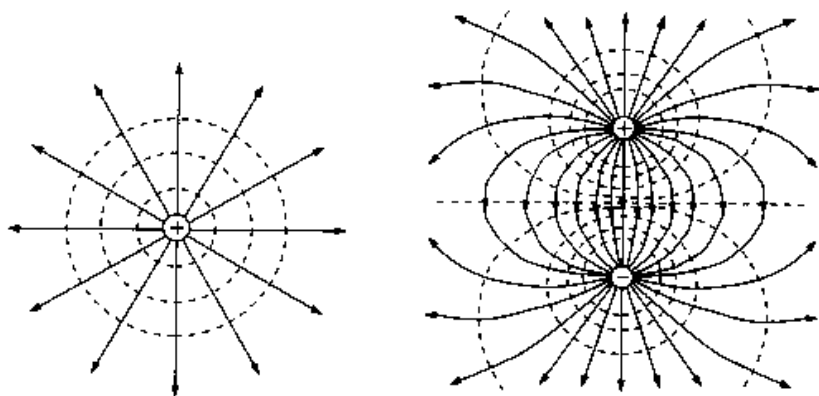
$$U = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr + \int_r^R 0 \cdot dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (r \leq R)$$

由上面的计算可知,球面内的场强处处为零,电势处处相等,所以球面内为等电势区域.球面外的电势与场点到球心的距离成反比.图 10-27 给出了电势随距离 r 的分布曲线.

§ 10.6 电场强度与电势梯度

一、等势面

前面曾用电力线来描绘电场中电场强度的分布情况.同样,也可以用等势面来表示电场中电势的分布状况.在电场中,电势相等的点所组成的曲面叫等势面.把对应于不同电势值的等势面逐个地画出来,并使相邻两等势面间的电势差为一常量,这样画出来的图形就能直观反映出静电场中电势的分布情况.图 10.28 给出了正点电荷和两个等量异号点电荷的等势面和电力线的分布图,其中,虚线代表等势面,实线表示电力线.



(a) 正点电荷的等势面 (b) 两个等量异号点电荷的等势面

图 10.28 等势面

根据等势面的意义可知它和电场的分布有一定关系,如果严格按照上述对等势面画法的规定,等势面就具有下列基本性质:

- (1) 等势面与电力线处处正交;
- (2) 等势面密集处场强大,等势面稀疏处场强小;

(3) 电力线总是由电势高的等势面指向电势低的等势面

等势面的概念在实际问题中也很有用, 主要是因为在实际遇到的很多带电问题中, 等势面的分布容易通过实验手段描绘出来, 并由此可以分析电场的分布.

二、电场强度与电势梯度

电场强度和电势都是描述电场中各点性质的物理量, 它们之间自然存在相互联系. 前面在定义电势时, 已经给出了电势和场强之间的积分关系, 即电势等于场强的线积分. 反过来, 电势和场强的关系也应该存在一种微分形式, 即场强等于电势的导数, 下面将讨论电势与场强关系的微分形式.

电势梯度如图 10.29 所示, 在电场中取两个邻近的等势面, 其电势分别为 U 和 $U + \Delta U$. 作一条电力线分别与两等势面交于 P_1 和 P_2 , 由于两等势面靠得很近, P_1 和 P_2 两点间的电力线可以看作是直线段 $\overline{P_1 P_2}$, 且线段上各点的场强也可以近似地认为处处相等. 根据电力线与等势面处处正交的性质, $\overline{P_1 P_2}$ 就是两等势面之间的垂直距离, 以 Δn 表示, 即 $\Delta n = \overline{P_1 P_2}$.

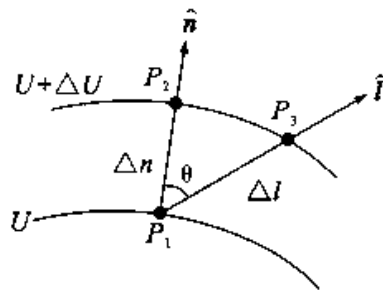


图 10.29 电势梯度

再在两等势面之间取任意方向的线段 $\overline{P_1 P_3}$, 设其长度为 Δl , 两线段 $\overline{P_1 P_2}$ 与 $\overline{P_1 P_3}$ 的夹角为 θ , 则

$$\Delta n = \Delta l \cos \theta$$

现在沿着两个方向看电势随空间距离的变化, 沿 \hat{n} 方向, 单位距离上引起的电势变化为 $\Delta U / \Delta n$; 沿 Δl 方向, 单位距离上引起的电势变化为 $\Delta U / \Delta l$, 因而有

$$\frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{\Delta U}{\Delta n} \cos \theta$$

在 $\Delta n \rightarrow 0$ 的极限情况下, 将电势的空间变化率记作 $\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l}$, $\frac{\partial U}{\partial n} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n}$ 则

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos \theta$$

上式表明, 电势 U 沿 \hat{n} 方向的变化率最大, 沿其余方向的变化率等于最大变化率 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 乘以 $\cos \theta$, 若同时考虑这个最大变化率所在的方向, 我们可以定义一个矢量 $(\partial U / \partial n) \hat{n}$, 其方向与该点电势增加最快的方向相同, 其大小等于该方向的电势变化率, 该矢

量叫做电势梯度,用 $\text{grad}U$ 来表示,即

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial n} \hat{r} \quad (10-41)$$

空间坐标的标量函数,称为标量场.电势 U 是个标量,它在空间每一点有一定的数值,所以电势作为空间坐标的函数是个标量场.

三、场强与电势梯度的关系

根据电势差的定义, P_1 与 P_2 两点间的电势差为 $U_{P_1} - U_{P_2} = E \cdot \Delta n$,假定 E 与 Δn 的方向一致,则 $U_{P_1} - U_{P_2} = E \cdot \Delta n$. 又知, P_1 与 P_2 两点间的电势差为 $U_{P_1} - U_{P_2} = U - (U + \Delta U) = -\Delta U$ 可见, $E = -\Delta U / \Delta n$,若取极限,有 $E = -\partial U / \partial n$,所出现的负号,说明场强的方向沿着电势降落的方向,用电势梯度来表示场强,即

$$E = -\text{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial n} \hat{r} \quad (10-42)$$

这就是说,在电场中任一点的电场强度矢量等于该点电势梯度矢量的负值. 电场强度与电势的微分关系,表明电场中某点的场强决定于电势在该点的空间变化率,而与该点电势值本身无关. 总之,为了描述静电场的分布,引入了电场强度 E 和电势 U ,前者是矢量,服从矢量叠加原理;后者是标量,服从标量叠加原理. 两者之间的关系,既有积分关系也有微分的关系,即式(10-34)和(10-42). 因此,只要知道 E 和 U 中之一的分布,就可用这些关系式求出另一个的分布. 一般而言,由于电势是标量,它的计算往往比场强简单,因此在很多情况下可以先直接算出电势的分布,然后利用其梯度来求出场强的分布. 只有在带电体具有一定对称性的情况下,才能较方便地先直接利用高斯定理来求出场强的分布,然后用场强的线积分来计算电势的分布.

思考题

10-1 场强方向可由 $E = F/q_0$ 定出,其中 q_0 可正可负,你认为对吗?

10-2 根据点电荷场强公式,其场强大小 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$,当 $r \rightarrow 0$ 时, $E \rightarrow 0$. 这

个问题应该如何解释?

10-3 闭合面内的电荷代数和为零,下列说法是否正确,为什么?(1) 闭合面上各点的场强处处为零;(2) 闭合面内必定无电荷;(3) 闭合面上的总电通量必为零.

10-4 在应用高斯定理求场强时,要求电荷分布应具有特定的对称性,是否可以说,当电荷分布不具有对称性时,高斯定理将失去意义.

10-5 如果闭合面上的场强 E 处处为零,能否断定该闭合面内一定没有电荷?能否断定该闭合面内一定没有净余电荷?

10-6 若沿着电力线方向移动电荷,电场力一定做正功吗?

10-7 若逆着电力线方向而行,电势一定升高吗?

10-8 试判断下列说法是否正确?为什么?(1) 场强相等的区域,电势也处处相等;(2) 场强大处,电势一定高;(3) 场强为零处,电势也一定为零;(4) 电势为零处,场强一定为零.

10-9 在静电场中,电力线为什么必须与等势面处处正交?

10-10 在什么情况下才能应用 $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$ 计算连续带电体电场中的电势.

10-11 试证明:等电势区域(体积)内的场强一定处处为零.

10-12 假如电场力的功与路径有关,环路定理还能否成立,这时还能不能引入电势、电势差的概念?

习 题

10-1 在边长为 a 的正方体中心处放置一电量为 Q 的点电荷,则在一个侧面中心处的电场强度的大小为多少?

10-2 一电场强度为 E 的均匀电场, E 的方向与 x 轴正向平行,如图习题 10-1 所示. 求通过图中一半径为 R 的半球面的电场强度通量.

10-3 两根无限长的均匀带电直线相互平行,相距为 $2a$,线电荷密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$,求每单位长度的带电直线受的作用力.

10-4 有一带正电的尘埃 q_0 ,在一正点电荷 q 的电场中沿着电力线方向移动,尘埃的动能和系统电势能的改变分别为 ΔE_K 和 ΔW ,试分别判断二者的正负.

10-5 实验证明,地球表面上方电场不为 0,晴天大气电场的平均场强约为

120V/m, 方向向下, 则地球表面上每平方厘米有多少过剩电荷?

10-6 如图 10.30 所示, 在一电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体中, 挖出一个以 O' 为球心的球状小空腔, 空腔的球心相对带电球体中心 O 的位置矢量用 b 表示, 试证球形空腔内的电场是均匀电场, 其表达式为 $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b$.

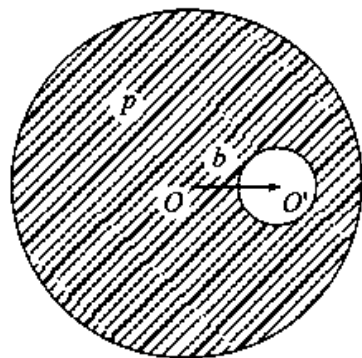


图 10.30

10-7 半径为 R 的圆盘均匀带电, 面电荷密度为 σ . 求此圆盘轴线上的电势分布: (1) 利用带电圆环在轴线上的电势结果, 采用电势叠加法; (2) 利用带电圆盘在轴线上的电场分布结果, 采用场强积分法.

10-8 一无限长均匀带电圆柱, 体电荷密度为 ρ , 截面半径为 a . (1) 用高斯定理求出柱内外电场强度分布; (2) 求出柱内外的电势分布, 以轴线为势能零点; (3) 画出 $E-r$ 和 $U-r$ 的函数曲线.

10-9 如图 10.31 所示, 3 块互相平行的均匀带电大平面, 面电荷密度为 $\sigma_1 = 1.2 \times 10^{-4} \text{C/m}^2$, $\sigma_2 = 2.0 \times 10^{-5} \text{C/m}^2$, $\sigma_3 = 1.1 \times 10^{-4} \text{C/m}^2$. A 点与平面 2 相距为 5.0cm, B 点与平面 2 相距 7.0cm. 计算 (1) A, B 两点的电势差; (2) 设把电量 $q_0 = -1.0 \times 10^{-8} \text{C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点, 外力克服电场力做多少功?

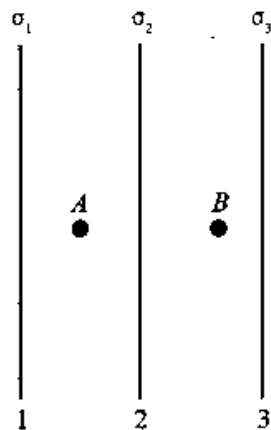


图 10.31

第 11 章 静电场中的导体和电介质

上一章只讨论了真空中静电场的性质和规律. 在实际问题中, 电场中总有导体或电介质存在. 在静电场中, 导体由于静电感应而出现感应电荷, 电介质由于极化而出现极化电荷, 这些电荷也要产生电场, 从而影响原电场的分布. 本章主要介绍在静电场中金属导体和电介质的基本特性以及它们对电场的影响, 还要介绍表明电场物质性的特征量静电场能, 并给出电场能量的具体表达式.

§ 11.1 静电场中的导体

一、导体的静电平衡条件

金属导体由带负电的自由电子和带正电的晶体点阵构成. 当导体不带电也不受外电场作用时, 自由电子的负电荷与构成晶体点阵的正电荷处处相等, 因此无论是对整个导体, 还是其中的一部分来说, 都呈现电中性. 此时, 自由电子只作无规则热运动, 不作宏观定向运动, 我们说导体处在静电平衡状态. 将导体放入场强为 E_0 的静电场后, 导体中的自由电子除作热运动外, 还要在外电场 E_0 的作用下, 相对于晶体点阵作定向运动, 如图 11.1(a) 所示. 定向运动的结果是导体上的电荷重新分布, 在导体的一个侧面出现负电荷, 相对的另一侧面出现正电荷, 如图 11.1(b) 所示. 导体由于受到静电场的作用而使其电荷重新分布的现象叫静电感应, 导体上出现的电荷叫感应电荷. 直到外电场和导体上重新分布了的电荷所产生的电场(用 E' 表示).

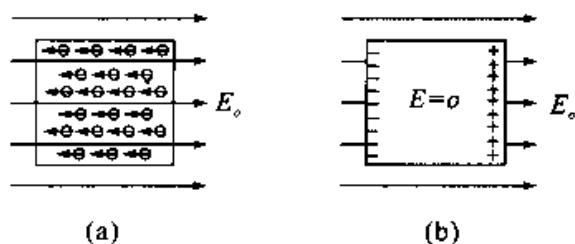


图 11.1 静电感应

对自由电子的作用相互抵消,导体中宏观电荷运动停止时,导体又达到新的静电平衡.

在静电平衡状态下,导体中的自由电子不再作宏观定向运动,自由电子所受合力为零,即这时导体内部每一点的场强等于零.否则,在场强不为零的地方自由电子将会发生宏观移动.因此,导体达到静电平衡的条件是导体内部场强处处为零.

二、导体静电平衡时的性质

从静电平衡条件出发,可推出以下性质:

(1) 导体是等势体,导体表面是等势面.由于导体内部场强处处为零,故导体内任意两点 b, c 的电势差 $U_{bc} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. 所以导体是等势体,导体表面是等势面.

(2) 导体以外靠近其表面的场强处处与表面垂直,场强大小与导体表面对应点的电荷面密度成正比.

由于电力线与等势面垂直,故导体表面附近的场强与表面垂直,其大小可以由高斯定理推出.如图 11.2,在导体外紧靠表面处任取一点 P ,过 P 点作导体表面的外法线单位 \hat{n} 矢量,则 P 点场强可表示为 $\mathbf{E} = E_n \hat{n}$. 过 P 作一个与导体表面平行的小面元,并以 ΔS_1 为底, \hat{n} 为轴作一个圆柱形高斯面,其另一底面在导体内部. 因为 ΔS_2 上场强处处为零,

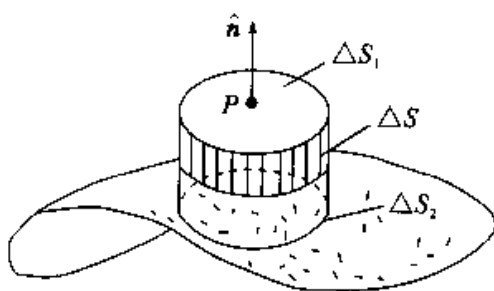


图 11.2 导体表面的场强

并注意到导体表面附近的场强与表面垂直,所以 ΔS_2 及侧面的电通量均等于零. 因此,高斯面的电通量等于面元 ΔS_1 的电通量,由于 ΔS_1 很小,其上各点场强可认为处处相等,由高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Delta S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_n \Delta S_1 = \sigma_e \Delta S / \epsilon_0$$

其中, ϵ_0 是导体表面与 P 对应点的电荷面密度, ΔS 是圆柱面在导体表面上截得的面元. 显然, $\Delta S = \Delta S_1 = \Delta S_2$, 故 $E_n = \sigma_e / \epsilon_0$ 写成矢量式为

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (11-1)$$

上式表明,导体表面附近的场强与表面上对应点的电荷面密度成正比. 必须注意,这里场强是空间所有电荷共同产生的.

(3) 导体内无净电荷,电荷只分布在导体表面上.

假设导体内某处有净电荷 $q_{内} \neq 0$, 则可在导体内取高斯面 S 包围 $q_{内}$, 由高斯定理知 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_{内} / \epsilon_0 \neq 0$, 则高斯面上必有场强 E 不等于零的点, 该结果与静电平衡条件相矛盾, 故假设 $q_{内} \neq 0$ 不成立. 因此导体内部不存在净电荷, 电荷只能分布在导体的表面上.

式(11-1)) 只给出导体表面上每一点的电荷密度与其附近场强之间的对应关系, 它并不能告诉我们在导体表面上电荷究竟是怎样分布的. 这个问题的定量研究比较复杂, 它不仅与该导体的形状有关, 还与它附近有什么样的其他带电体有关. 然而, 对于孤立的带电导体来说, 尽管其表面的电荷面密度 σ_e 与曲率之间并不存在单一的函数关系, 但是大致说来, 导体表面凸出而尖锐的地方 σ_e 较大; 表面较平坦的地方曲率较小, σ_e ; 表面凹进去的地方曲率为负, 则 σ_e 更小. 由式(11-1) 可见, 孤立导体表面附近的场强分布与上述电荷分布有同样的规律, 即尖端附近的场强大, 平坦的地方次之, 凹进去的地方场强最弱.

在导体的尖端附近电场特别强, 会发生尖端放电现象. 尖端放电只发生在靠近导体尖端表面的很薄的一层空气里, 在暗处可以看到尖端附近隐隐地笼罩着一层光晕, 叫做电晕. 高压输电线附近的电晕放电会浪费很多电能, 为避免这种现象, 高压输电线表面应做得极为光滑, 其半径也不能过小. 此外, 一些高压设备的电极还常常作成光滑的球面, 以维持高电压.

场离子显微镜所利用的正是金属尖端产生的强电场. 如图 11.3 所示, 样品制成针尖形状, 被置于先抽成真空后充进少量氮气的玻璃泡中, 泡内壁敷上一层荧光质导电膜. 在针尖样品和荧光膜之间加上高电压, 样品附近极强的电场使吸附在其表面上的氮原子发生电离, 氮离子将沿电场线运动, 撞击荧光膜而引起发光, 从而获得了样品表面的原子图像.

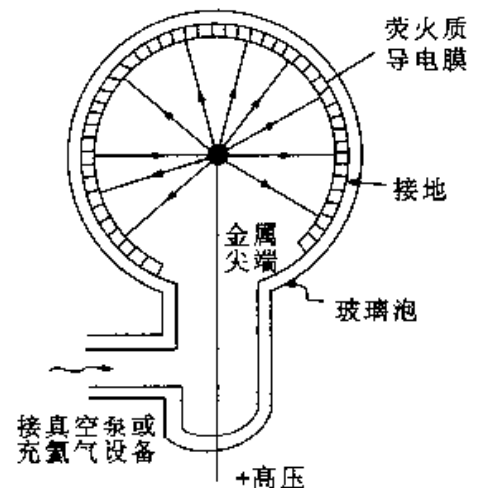


图 11.3 场离子显微镜

三、导体空腔在静电平衡时的性质 静电屏蔽

1. 腔内无带电体的情形

当导体空腔内无其他带电体(不论空腔外情况如何)时, 在静电平衡时, 导体空腔上的电荷只能分布在外表面, 空腔内表面上处处

无电荷,空腔内无电场,腔内及空腔整体是一等势区.

对上述结论,可作如下证明.在导体的内外表面之间任取一高斯面 S ,将内表面包围起来(图 11.4)因高斯面上场强处处为零,故 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$. 该结果表明,内表面上电荷代数和为零.这还有两种可能,一种是导体内表面上处处无电荷;另一种可能是在导体内表面上有等量异号电荷.

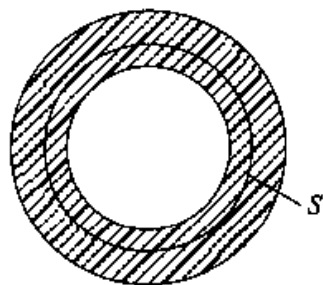


图 11.4 导体空腔

若内表面上有等量异号电荷,则必有电力线发自正电荷终止于负电荷.由于电力线两端电势不相等,这与导体是等势体相矛盾,因此导体内表面带等量异号电荷是不可能的.

上述证明,得出腔内不可能有电力线,空腔内无电场,从而腔内及空腔整体是一等势区.

电荷只分布在导体外表面上的结论,是建立在高斯定理基础上的,而高斯定理又是由库仑平方反比律导出的.如果点电荷之间的相互作用力偏离了平方反比律,或者说,如果在力的关系式 $f \propto \frac{1}{r^{2-\delta}}$ 中对平方反比律的指数偏差 $\delta \neq 0$,则高斯定理将不再成立,从而导体上的电荷也就不会完全分布在外表面上了.用实验方法来研究导体内部是否确实没有电荷,可以比库仑扭秤实验精确得多地验证力的平方反比律.这类实验首先是卡文迪许在 1773 年完成的,他证明不会超过 0.02.1971 年威廉斯等人的实验结果表明, δ 的上限为 $(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$.

根据近代的量子场论,严格的库仑平方反比律与光子的静质量严格为零是联系在一起的.由上述关于 δ 的上限的结果可以推论,光子的静质量 m_0 的上限为 10^{-31}kg .如果光子的静质量不为零,光在真空中传播时还会有色散.可见,库仑的平方反比律与物理学中很多极为重要的基本问题有关.

库仑平方反比律的精确实验验证.卡文迪许的实验装置如图 11.5 所示.金属球 1 由绝缘支柱 2 支撑着,绝缘的金属球壳 3 套在金属球 1 的外边,它由两个半球组成,在其中之一的一面有一个小孔.一段导线 4 由绝缘丝线 5 悬挂着,

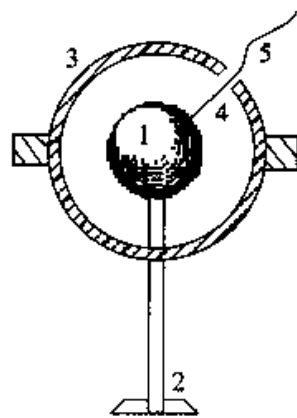


图 11.5 卡文迪许实验

可探进小孔将球 1 与球壳 3 联接起来,使球 1 的表面变成为球壳 3 的内表面的一部

分. 实验时, 先使联接在一起的球 1 和球壳 3 带电, 然后将导线抽出, 再将球壳 3 的两半分开并移去, 用静电计检验球 1 上的电荷. 反复做上述实验, 结果表明球 1 上总是不存在电荷.

范德格拉夫起电机的基本原理和应用. 范德格拉夫起电机的结构示意图如图 11.6 所示. 金属球壳由绝缘支柱支持着, 橡胶布做成的传递带由一对转轮带动, 传送带由于联接电源一端的尖端导体电刷 A 喷射电荷而带电. 传送带背后的接地导体板 C 的作用, 是加强由尖端 A 向传送带的电荷喷射. 当带电传送带经过另一尖端导体电刷 B 的近旁时, 电刷 B 便将电荷传送给与它相联接的导体球壳. 这些电荷将全部分布到金属球壳的外表面上去, 使它相对于地的电势不断提高. 由于强电场中空气电离所引起的电晕放电, 以及局部尖端放电和沿绝缘支架的漏电等现象, 金属球壳电势的提高受到了限制. 加大球壳直径, 例如从 1m 增大到 2m 甚至 10m, 并提高球壳周围氮气的压强到几个大气压, 可以得到几百万伏的高压.

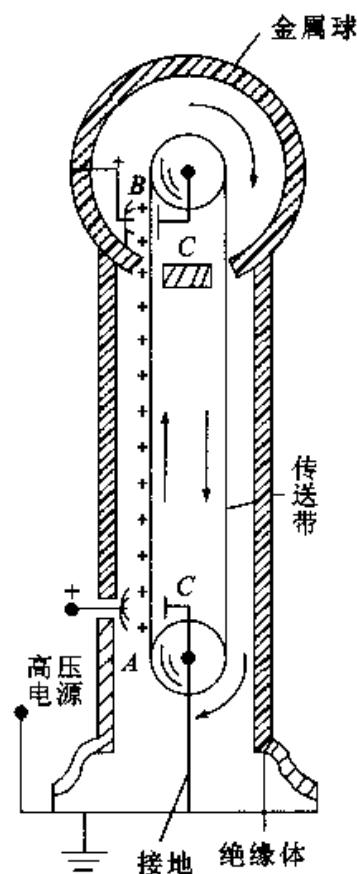


图 11.6 范德格拉夫起电机

范德格拉夫起电机主要用来构成静电加速器, 用于加速带电粒子. 将离子源放在金属球壳内, 由于金属球壳相对于外界具有高电压, 因此将离子引出球壳后进入加速管时, 在电场力的作用下将获得很大的动能, 这种高速带电粒子可供原子核反应实验之用. 近年来, 在晶体管 and 集成电路等半导体器件的制造工艺中, 新发展的一种离子注入技术, 就是利用加速器使离子经过电场加速后形成高速离子束, 然后用这离子束轰击半导体晶片而注入其中, 使半导体晶片掺入一定的杂质元素.

2. 腔内有带电体的情形

导体空腔内有带电体时, 在静电平衡下, 空腔内表面所带电荷与腔内电荷等值反号; 内表面上的电荷分布只与腔内带电体及内表面的形状有关, 与腔外情况无关; 若导体空腔接地, 腔外电场不受腔内电场的影响.

对上述结论可作如下讨论. 如图 11.7(a), 先设腔内无带电体, 这时无论腔外(包

括外表面)情况如何,空腔外表面以内各点场强均为零.若将一点电荷 $-q$ 放进腔内,由高斯定理知,腔的内表面将感应出等量异号电荷 $+q$,同时,腔外表面将增加电量 $-q$.这说明静电平衡时,腔内表面所带电荷与腔内电荷等值异号.由于腔外电场对腔内无影响,故内表面上的电荷分布只由腔内带电体以及内表面形状决定,与腔外情况无关.又因为在腔内引入电荷后,腔的外表面电荷发生了变化,因此腔外电场受到腔内电荷的影响.为了消除这种影响,可以把空腔接地,如图11.7(b)所示.空腔外表面因静电感应而增加的那部分电荷通过导线流入地内,这样腔内带电体对腔外无任何影响.

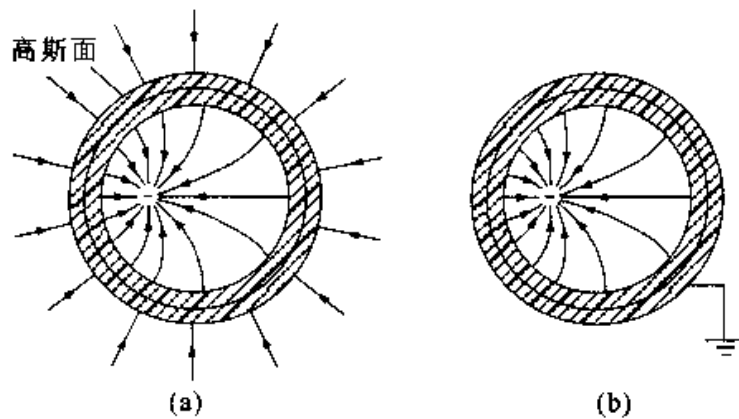


图 11.7 静电屏蔽

3. 静电屏蔽

如前所述,在静电平衡状态下,腔内无其他带电体的导体壳和实心导体一样,内部没有电场.只要达到了静电平衡状态,不管是导体壳本身带电还是导体壳处在外电场中,这一结论总是对的.这样,导体壳的表面就“保护”了它所包围的区域,使之不受导体壳外表面上的电荷或外电场的影响.而且,接地良好的导体壳又可以把内部带电体对外界的影响全部消除[见图11.7(a)].总之,导体壳(不论接地与否)内部电场不受壳外电荷的影响,接地导体壳外部电场不受壳内电荷的影响,这种现象称为静电屏蔽.

静电屏蔽在实际中有重要的应用.例如,为了使精密的电磁测量仪器不受外界电场的干扰,通常在仪器外面加上金属外壳或金属网作成的外罩.又如,为使高压设备不影响其他仪器的正常工作,可把它的金属外壳接地.

例 11-1 空间有两块平行放置的导体板 A 和 B,两板长宽相等,面积均为 S ,板间距离为 d ,且板的线度比 d 大得多.设两板分别带电量 Q_A 和 Q_B .板外无其他带

电体或导体,求每板表面的电荷面密度.

分析 由题中条件可知,两平行板均可看成是无限大带电导体板,且它们都处于静电平衡状态,故电荷只能分布在两平行板的四个表面上.由对称性知,各表面上的电荷是均匀分布的(边缘除外),各表面在空间任一点产生的场强为 $E = (\sigma_s/2\epsilon_0) \hat{n}$.因此,可运用静电平衡条件和场强叠加原理求解.

解 如图 11.8 所示,设四个表面上的电荷面密度分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$,由对称性知,每个带电表面在空间各处产生的场强分别为

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \hat{n}_1, E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{n}_2, E_3 = \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} \hat{n}_3, E_4 = \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} \hat{n}_4$$

其中 $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4$ 分别为背离各自带电表面的法线单位矢量.

在 A, B 两板内任取两点 a 和 b ,由场强叠加原理以及静电平衡条件可得

$$E_a = E_{1a} + E_{2a} + E_{3a} + E_{4a}$$

$$E_b = E_{1b} + E_{2b} + E_{3b} + E_{4b}$$

建立如图所示的 $O-x$ 坐标系,则 E_a, E_b 在 Ox 轴上的投影分别为

$$E_a = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

$$E_b = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

所以有

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad (2)$$

又因各板带电量和电荷面密度的关系分别为

$$\sigma_1 + \sigma_2 = Q_A/S \quad (3)$$

$$\sigma_4 + \sigma_3 = Q_B/S \quad (4)$$

联立求解方程(1)、(2)、(3)、(4)得

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{Q_A + Q_B}{2S} \quad (5)$$

$$\sigma_2 = -\sigma_4 = \frac{Q_A - Q_B}{2S} \quad (6)$$

讨论 (1) 若 $Q_A = -Q_B$,则 $\sigma_1 = \sigma_3 = 0, \sigma_2 = -\sigma_4 = Q_A/S$.

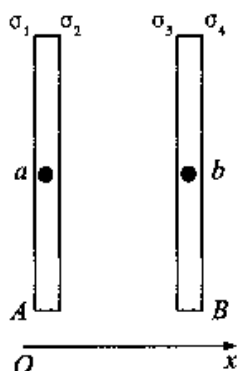


图 11.8 两导体板上的电荷分布

(2) 若 $Q_A = Q_B$, 则 $\sigma_1 = \sigma_3 = Q_A/S, \sigma_2 = -\sigma_3 = 0$.

(3) 一般地, $Q_A \neq Q_B, RC$, 各表面都有电荷分布, 各表面的电荷面密度由(5)、(6)式给出.

例 11-2 如图 11.9 所示, 半径为 R_1 的导体球被一个半径分别为 R_2, R_3 的同心导体球壳罩着, 若分别使导体球和球壳均匀带电 q 和 Q , 试求:

(1) 导体球和球壳的电势各为多少? 二者电势差是多少

(2) 若用导线将球和球壳连接起来, 两者电势为多少?

分析 欲求导体球和球壳的电势, 必须先求出空间电场的分布. 根据静电平衡特性, 电荷 q 分布在球的表面上; 球壳内表面将出现 $-q$ 的感应电荷, 球壳外表面电荷变为 $Q+q$. 根据对称性, 可运用高斯定理求场强, 进而由电势定义求出电势.

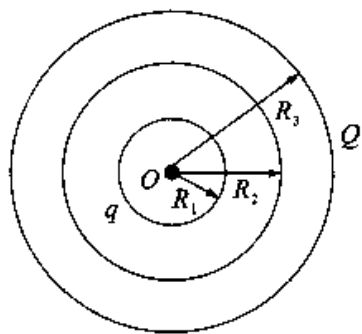


图 11.9 导体系的电势

解 (1) 由于静电感应, 球的表面以及球壳的内外面分布的电荷分别为: $q, -q, Q+q$. 由于电荷分布具有球对称性, 因此场强的分布亦具有球对称性. 由高斯定理可求得空间各点场强的大小为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1, R_2 < r < R_3) \\ q/(4\pi\epsilon_0 r^2) & (R_1 < r < R_2) \\ (Q+q)/(4\pi\epsilon_0 r^2) & (r > R_3) \end{cases}$$

电场的方向均沿球的半径方向向外. 由电势的定义可得球的电势 U_1 、球壳的电势 U_2

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{R_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_3}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + 0 + \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \\ U_2 &= \int_{R_3}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \end{aligned}$$

二者的电势差为

$$U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(2) 当球和球壳之间用导线连接时, 它们上的电荷将重新分布, 直到电势相等达到新的静电平衡, 此时电荷都分布在球壳的外表面. 空间各点电场强度的大小为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_3) \\ (Q+q)/(4\pi\epsilon_0 r^2) & (r > R_3) \end{cases}$$

球和球壳的电势相等, 它们的电势差为零. 由电势的定义, 可求得它们的电势

$$U = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_3}^\infty \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

§ 11.2 静电场中的电介质

一、电介质的极化及其微观机制

1. 电介质的极化现象

电介质就是通常所说的绝缘体. 在电介质内部, 几乎不存在可以自由运动的电荷, 其原子中的电子都被紧紧地束缚在原子核的周围, 并且在一般情况下不轻易离去, 因此电介质在静电场中将表现出与金属导体根本不同的性质. 但有一点却是相似的, 就是在静电场的作用下, 电介质表面(或内部)将出现电荷, 这种电荷叫极化电荷. 电介质出现极化电荷的现象, 称为电介质的极化. 由于极化电荷与自由电荷不同, 它不能脱离原子的约束而自由运动, 故此又叫束缚电荷.

电介质的极化与导体的静电感应本质上截然不同. 将导体放在外电场 E 中后, 感应电荷在导体内部产生的电场能把外电场 E' 全部抵消, 使导体内部场强为零, 而电介质上的极化电荷比导体上的感应电荷在数量上要少得多, 因此极化电荷在电介质内部产生的场强 E' 并不能把 E_0 全部抵消, 只能削弱电介质中的外电场, 所以电介质内部的场强应为 $E_0 + E' \neq 0$. 图 11.10 就是一块长方形均匀电介质在外电场 E_0 中被极化的情形.

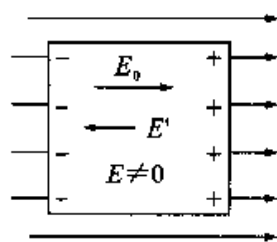


图 11.10 电介质的极化

2. 极化的微观机制

电介质是由中性分子组成的, 一个分子中正、负电荷等值异号, 但每个分子中的正、负电荷一般并不是集中于一点. 在比分子线度大得多的地方观察, 分子中全部正

电荷的影响可以用一等效的正点电荷来代替,全部负电荷的影响可以用一等效的负点电荷来代替,这等效的正、负点电荷所在的位置称为该分子的正、负电荷“中心”。这样,一个中性分子可看作是由一对等值异号的点电荷组成,依照此模型可把电介质分为两类:无极分子电介质和有极分子电介质。

(1) 无极分子电介质及其极化一类电介质中,每个分子的正负电荷中心重合,每个分子的电偶极矩 $P = 0$,从而整个电介质或电介质的某一体积(包含大量分子)呈中性,即 $\sum P_{分} = 0$,这类电介质叫做无极分子电介质,如 H_2, H_2, N_2, O_2, CO_2 等。当加上外电场后,由于电场的作用,每个分子的正负电荷中心被拉开一很小的距离,形成一个电偶极子,于是分子的电偶极矩 P 不再为零,其方向与外电场方向一致,所以 $\sum P_{分} \neq 0$,在宏观上电介质表面或内部出现极化电荷,这种极化称为位移极化,如图 11.11 所示。

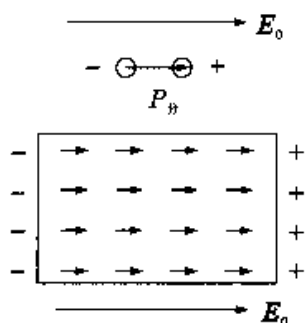


图 11.11 位移极化

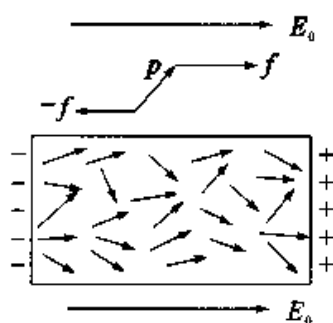


图 11.12 取向极化

(2) 有极分子电介质及其极化另一类电介质中,每个分子正负电荷中心不重合,因而每个分子都可当成一个电偶极子,其电偶极矩 $P_{分} \neq 0$,这类电介质叫有极分子电介质,如 H_2O, H_2S, HCl, CO 等。因为在介质的某一体积以及整个介质内,各分子电偶极矩的取向是杂乱无章的,故各个分子电偶极矩的矢量和为零,即 $\sum P_{分} = 0$,因而有极分子电介质也呈中性。当加上外电场后,由于电场的作用,分子的电偶极矩将转向外场方向排列,所以 $\sum P_{分} \neq 0$,在宏观上介质表面或内部出现极化电荷,这种极化称为取向极化。不过,由于分子无规则运动的干扰,分子的电偶极矩一般不可能完全转到外电场方向,有的甚至相差很远(如图 11.12)。外电场越强,各电偶极子转到电场方向的强度越大。

实际上,有极分子电介质在外电场的作用下,同样存在位移极化,但位移极化要比取向极化弱得多,约弱一个数量级。

总之, 尽管两类电介质极化的微观机制不同, 但其结果都是在介质表面出现极化电荷(非均匀电介质内部也会出现极化电荷), 因此在对电介质作宏观描述时, 不再区分这两种极化.

二、极化强度

为了定量地描述电介质的极化程度, 我们引入电极化强度矢量这个物理量.

考虑电介质内任一宏观小、微观大的体积元 ΔV , 当电介质极化后, ΔV 内所有分子的电偶极矩的矢量和 $\sum \mathbf{P}_f \neq 0$. 我们把 \mathbf{P}_f 与 ΔV 之比叫做 ΔV 所在点的电极化强度矢量, 简称极化强度, 用 \mathbf{P} 表示, 即

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{P}_f}{\Delta V} \quad (11-2)$$

\mathbf{P} 是量度电介质极化状态(包括极化强弱和极化方向)的物理量, 是宏观的矢量点函数. 在国际单位制中, 极化强度的单位为库仑每平方米(C/m^2).

一般地, 介质内各点的 \mathbf{P} 并不相同. 如果电介质中各点 \mathbf{P} 的大小、方向均相同, 则称电介质均匀极化.

实验表明, 对于大多数常见的各向同性线性电介质, 任意一点的极化强度 \mathbf{Q} 与该点的总电场强度 \mathbf{E} 成正比, 且方向相同, 即

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (11-3)$$

式中 χ_e 称为电介质的极化率, 它是描述电介质极化性质的物理量, 与场强 \mathbf{E} 无关. χ_e 大于零, 是一个无量纲的纯数. 若介质中各点 χ_e 为常数, 则称为均匀介质.

应该强调, 式(11-3)中的场强 \mathbf{E} 是所考虑的场点的总场强, 它既包括外加电场 \mathbf{E}_0 , 也包括极化电荷所产生的附加电场 \mathbf{E}' , 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

分析表明, 在电介质内部, 极化电荷所产生的附加场 \mathbf{E}' , 总是起着减弱原来的外电场 \mathbf{E}_0 的作用, 即 $|\mathbf{E}| < |\mathbf{E}_0|$, 因而也总是起着减弱介质极化的作用, 通常称之为退极化场其大小依赖于电介质的几何形状和极化率 χ_e .

三、极化电荷与极化强度的关系

可以证明, 非均匀电介质极化后, 极化电荷不仅出现在介质表面上, 也可能出现在其内部. 但均匀电介质极化后, 极化电荷只出现在介质表面上. 我们只讨论均匀电

介质的情况。

在均匀电介质内取一个长 l , 底面积为 ΔS 的小圆柱体, 使极化强度 P 的方向与圆柱体的轴线平行, 如图 11.13 所示。由于圆柱体很小, 可以认为其中介质的极化是均匀的。柱体侧面将不出现极化电荷, 即极化电荷只分布在圆柱体的两个底面上。

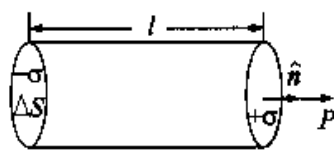


图 11.13 极化电荷

上, 设两底面极化电荷面密度分别为 $+\sigma'$ 和 $-\sigma'$ 。从宏观上看, 可以把整个圆柱体视为一个“大电偶极子”, 其电偶极矩大小应为 $(\sigma'\Delta S)l$, 显然这个电偶极矩是由圆柱体内所有分子的电偶极矩提供的, 即圆柱体内所有分子电偶极矩的矢量和的大小为 $|\sum P_{分}| = (\sigma'\Delta S)l$ 。由于圆柱体体积 $\Delta V = \Delta Sl$, 因此介质内极化强度的大小为

$$P = \frac{|\sum P_{分}|}{\Delta V} = \frac{\sigma'\Delta Sl}{\Delta Sl} = \sigma' \quad (11-4)$$

在一般情况下, 若介质表面上某点的极化强度与该点表面的外法线单位矢量 \hat{n} 的夹角为 θ , 则该点的极化电荷面密度 σ' 为

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta = P_n \quad (11-5)$$

式中 P_n 是 P 沿表面外法线方向的投影。可见, 极化电荷面密度等于极化强度沿该表面外法线方向的投影。若 $\theta < \pi/2$, 则 $\sigma' > 0$, 介质表面带正电; 若 $\theta > \pi/2$, 则 $\sigma' < 0$, 介质表面带负电, 如图 11.14 所示。

在电介质内部, 可以取一任意曲面 S , 这时 \hat{n} 为其外法线方向上的单位矢量。可以证明, 闭合曲面 S 内的极化电荷的代数和 $\sum q'_{内}$ 为

$$\sum q'_{内} = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (11-6)$$

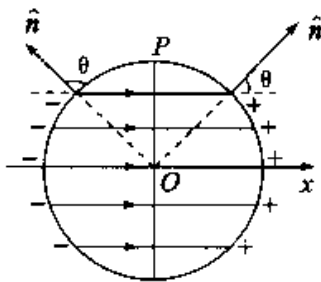


图 11.14 表面极化电荷

这就是极化强度 P 与极化电荷分布之间的普遍关系式, 它表明任意闭合曲面的极化强度 P 的通量, 等于该闭合曲面内的极化电荷总量的负值。

上述结果表明, 在外电场 E_0 的作用下电介质将发生极化, 极化强度 P 和电介质的形状决定了极化电荷 σ' 的分布, 而 σ' 的分布又决定了附加场 E' , 从而影响了电介质内部的总电场 E , 这又反过来影响了极化强度 E 。由此可见, P 、 σ' 、 E_0 和 E' 这些量是彼此依赖, 相互制约的。为了计算它们之中任何一个量, 都需要把它们之间的关系

联立起来,统一考虑.

四、电位移 有电介质时的高斯定理

如上所述,电介质存在时各物理量之间,特别是极化强度与极化电荷分布之间的相互依赖关系,往往使得问题的求解变得很复杂.但是,这种复杂的关系可以通过引入适当的物理量来简明地表示出来,以下我们用高斯定理来导出这种表达式.

高斯定理是建立在库仑定律基础上的,在有电介质存在时它也成立,只不过在计算总电场的电通量时,应计及高斯面内所包含的自由电荷 q_0 和极化电荷 q' ,即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum (q_0 + q')$$

用 ϵ_0 乘上式两边,与式(11-6)相加,可以消去极化电荷 $\sum q'$,得到

$$\oiint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0 \quad (11-7)$$

引进一个辅助性的物理量 \mathbf{D} ,称为电位移,它的定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (11-8)$$

利用电位移 \mathbf{D} ,可以将式(11-7)改写成

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0 \quad (11-9)$$

即通过任意闭合曲面的电位移通量,等于该闭合曲面包围的自由电荷的代数和,这就是有电介质时的高斯定理,它是电磁学的基本规律之一.大量事实证明,即使在变化的电磁场中,式(11-9)仍然成立,它是麦克斯韦方程组中的一个方程.

将式(11-8)代入式(11-9),可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_r \epsilon_0 \mathbf{E} \\ &= (1 + \chi_r) \epsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (11-10)$$

$$\text{令} \quad \epsilon_r = 1 + \chi_r \quad (11-11)$$

$$\epsilon = (1 + \chi_r) \epsilon_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (11-12)$$

其中 ϵ 称为电容率或介电常数,它是一个与 ϵ_0 有相同量纲的量; ϵ_r 称为相对电容率或相对介电常数,它是一个无量纲的量.在真空中, $\epsilon_r = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$,所以 ϵ_0 称为真空电容率或真空介电常数.利用这些常量,式(11-10)可写成

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (11-13)$$

这就是在各向同性的线性电介质中,电位移 \mathbf{D} 与场强 \mathbf{E} 之间的关系式.在国际

单位制中,电位移 D 的单位是 C/m^2 (库仑每平方米)。

式(11-9)和式(11-13)可以使电介质存在时的计算大为简化. 在有一定对称性的情况下,可以利用高斯定理[式(11-9)]先求出电位移 D 的分布,而无需知道极化电荷的分布. 然后,再利用介质方程式(11-13),求出电场强度 E 的分布.

可以证明,当均匀电介质充满存在电场的全部空间时,或者当均匀介质的表面正好是等势面时,有

$$D = \epsilon_0 E_0, \quad E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

其中, E_0 是自由电荷所产生的电场. 例如,当点电荷 q_0 周围充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质时,可以 q_0 为中心,取任意半径 r 作球形高斯面 S ,由式(11-9)得到

$$E = \frac{q_0}{4\pi r^2} = \epsilon_0 E_0$$

由此立即得到

$$E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

电介质的存在之所以会使场强减小,是因为点电荷 q_0 被一层正负号与之相反的极化电荷所包围,它所产生的电场把点电荷 q_0 所产生的电场抵消了一部分,通常把这个效应说成是极化电荷对自由电荷 q_0 起了一定的屏蔽作用.

例 11-3 半径为 R 的均匀带电球面,带电量为 q_0 ,电荷面密度为 σ_0 . 将其放在均匀无限大介质中,介质的相对介电常数为 ϵ_r . 求介质中场强的分布及介质表面的极化电荷面密度 σ' .

分析球面上的电荷是均匀分布的,介质是均匀无限大的,因此 σ_0 和 σ' 的分布都具有球对称性,所以介质中的 D , E , P 也具有球对称性,即介质中某点的 D , E , P 的大小只与该点到球心的距离有关,其方向沿球的半径方向向外.

解 如图 11.15 所示,在介质中任取一点 a ,以 Oa 为半径作一球面 S ,由介质存在时的高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

由于对称性,球面 S 上各点的 D 值的大小一样,则 $D4\pi r^2 = q_0$,所以

$$D = \frac{q_0}{4\pi r^2} \hat{r}$$

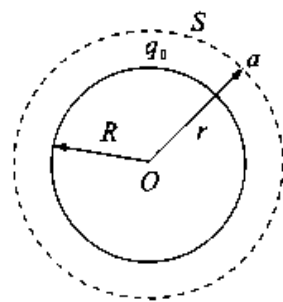


图 11.15 介质中带点球面

\hat{r} 是沿球面半径向外的单位矢量, 介质中的场强 E 为

$$E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \frac{q_0}{r^2}$$

因为 $D = \epsilon_0 E + P$, 所以介质中的极化强度 P 为

$$P = \frac{(\epsilon_r - 1)q_0}{4\pi\epsilon_r r^2} \hat{r}$$

在介质的内表面上, P 的大小为 $(\epsilon_r - 1)q_0 / (4\pi\epsilon_r R^2)$, 方向与内表面外法线的方向相反, 所以介质内表面上的极化电荷面密度 σ' 为

$$\sigma' = P_n = -\frac{(\epsilon_r - 1)q_0}{4\pi\epsilon_r R^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q_0}{4\pi R^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0$$

上述结果表明, 介质内表面的极化电荷与导体球面上的自由电荷异号, 且 $|\sigma'| < |\sigma_0|$.

§ 11.3 电容和电容器

电容是导体或导体组的一个重要特性. 电容器是一种特定的导体组, 在实际中有十分广泛的应用.

一、孤立导体的电容

在上一章中曾计算出真空中孤立导体球的电势 $U = Q / (4\pi\epsilon_0 R)$, 显然, 孤立导体球的电势与其带电量成正比, 比值 $U/Q = 1 / (4\pi\epsilon_0 R)$ 是与 Q, R 无关的常数.

对任意形状的孤立导体, 理论和实验都表明电势与电量成正比的关系仍然成立, 即

$$\frac{Q}{U} = C \quad (11-14)$$

C 称为电容, 是描述导体储存电荷和电能的能力大小的物理量, 它与 Q, U 均无关, 只决定于导体自身的大小和形状. 例如真空中孤立导体球的电容 $C = 4\pi\epsilon_0 R$, 只由半径 R 决定.

在国际单位制中, 电容的单位是法拉(F). 若导体带电量 1 库仑, 电势为 1 伏特, 则它的电容就是 1 法拉, 即

$$1 \text{ 法拉} = 1 \text{ 库仑每伏特}$$

在实际应用中,还采用微法(μF)和皮法(PF)作为单位,它们的关系为

$$1\text{F} = 10^6 \mu\text{F}, \quad 1\mu\text{F} = 10^6 \text{PF}$$

二、电容器的电容

在导体周围有其他导体存在时,则该导体的电势不仅与本身所带电量有关,而且还取决于其他导体的位置和形状.为了消除周围其他导体的影响,可以用一个封闭的导体壳 B 将 A 屏蔽起来,如图 11.16 所示.若使 A 带电 Q , B 的内表面就产生感应电荷 $-Q$,空腔中产生场强 E .此时, A, B 之间的电势差 $U_A - U_B = \int_A^B E \cdot dl$. 对于这样一个导体组,空腔内的场强以及 A, B 之间的电势差不受外界导体 C, D (不管其带电与否) 的影响.这时若使 A 的电量增加一倍,则 B 的内表面上感应电荷的电量、腔内各点的场强以及 A, B 之间的电势差都跟着增加一倍,即电势差 $U_A - U_B$ 和电量 Q 成正比.我们将比值

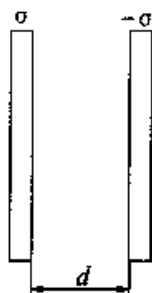


图 11.16 平行板电容器

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{Q}{U_{AB}} \quad (11-15)$$

定义为这个导体组的电容,而该导体组就称为电容器.组成电容器的两导体称为电容器的极板.电容器的电容只与两导体大小、形状、相对位置以及导体间存在的电介质有关,与 Q 和 $U_A - U_B$ 无关.在实际所应用的电容器中,对其屏蔽性能的要求并不很高,只要求从一个极板发出的电场线几乎都终止在另一个极板上就行了.

实际上,孤立导体也可以看成是一个电容器,它的另一极板在无限远处.因此,孤立导体的电容和电容器的电容在实质上是一致的.

三、电容的计算

常见的电容器有平行板电容器、圆柱形电容器和球形电容器.下面分别介绍这三种电容器,并且推导这三种电容器的电容公式.

1. 平行板电容器及其电容

平行板电容器是由两块大小相等且彼此靠得很近的平行金属板组成,极板面积为 S ,内表面之间的距离为 d ,在两极板间充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质,如图 11.16 所示.

当电容器的两极板分别带有电量 Q 和 $-Q$ 时,由于 d 远小于极板的线度,故可以

忽略边缘效应,将极板看成是无限大带电导体板,因此两极板之间的电场是均匀电场.设极板内表面上电荷面密度为 $\pm\sigma_0$,由有介质存在时的高斯定理,容易得出两极板间的电场强度的值为 $E = \sigma_0 / (\epsilon_0 \epsilon_r)$,极板间的电势差为

$$U_{AB} = Ed = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \quad (11-16)$$

这就是平行板电容器的电容公式.它表明平行板电容器的电容仅与极板面积 S 、极板间距 d 以及极板间的介质有关.当极板间为空气时, $\epsilon_r \approx 1$,则电容为

$$C = \epsilon_0 S/d$$

可见,极板间充满电介质后,电容器的电容增大了.

2. 圆柱形电容器

圆柱形电容器是由两个同轴圆柱形导体圆筒 A 、组成的导体组,导体间充以相对介电常数为 ϵ_r 的电介质,内外圆筒形导体的半径分别为 R_A 和 R_B ,当其长度 $L \gg (R_B - R_A)$ 时如图(11.17),可忽略两端的边缘效应,将其看成是无限长圆筒.

设两极板相对的两个表面上分别带有电量 Q 和 $-Q$,则圆筒单位长度上电量的绝对值为 $\lambda_c = Q/L$.由有介质存在时的高斯定理,可求出柱体之间距离轴线 r 处的场强大小为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r r}$$

两极板 A 、 B 间的电势差为

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_{R_B}^{R_A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_B}^{R_A} \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r r} dr \\ &= \frac{\lambda_c}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_B}{R_A} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r L} \ln \frac{R_B}{R_A} \end{aligned}$$

由电容器电容的定义知,圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln(R_B/R_A)} \quad (11-17)$$

3. 球形电容器及其电容

球形电容器是由两个同心导体球壳 A 、 B 组成的,它们的半径分别为 R_A 和 R_B ($R_B > R_A$),其间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质,如图11.18所示.

设两同心导体球壳相对的两个导体面分别带电量 Q 和 $-Q$,由介质存在时的高

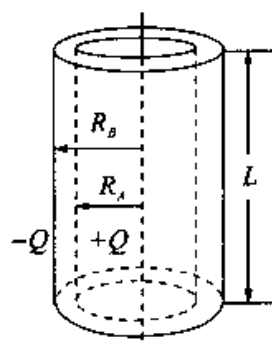


图 11.17 圆柱形电容器

斯定理可得出两导体间的场强分布为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r}$$

其中 r 为场点到球心的距离, \hat{r} 为沿球半径向外的单位矢量, 两导体间的电势差为

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \frac{(R_B - R_A)}{R_A R_B}$$

球形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_A R_B}{(R_B - R_A)} \quad (11-18)$$

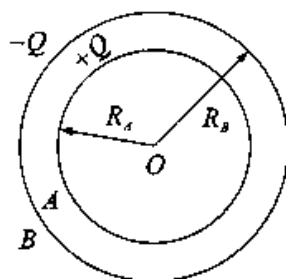


图 11.18 球形电容器

例 11-4 在一个平行板电容器的两极板之间充有两层介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的电介质, 如图 11.19 所示, 其厚度分别为 d_1 和 d_2 , 并且 $d_1 + d_2 = d$, d 为电容器两极板内表面间的距离. 若电容器极板上的电荷面密度分别为 σ_0 和 $-\sigma_0$, 极板面积为 S , 求电容器的电容.

分析 由定义式 $C = Q/U_{AB}$ 知, 欲求 C , 须先由场强求出 U_{AB} . 而求 E 时可运用有介质存在时的高斯定理.

解 为求得第一种介质中的场强, 作一底面积为 ΔS_1 的圆柱形高斯面 S_1 , 其上底面处于极板内部并与极板平行, 下底面处于第一种介质之中并与极板平行, 侧面与极板垂直, 如图 11.19 所示. 由于柱体侧面与电位移矢量平行,

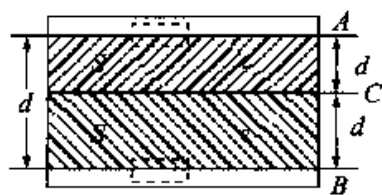


图 11.19

行, $\oiint_{\text{侧面}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = 0$, 上底面处于极板的金属导体内, $\oiint_{\text{上侧面}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = 0$, 因此

$$\oiint_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\text{下侧面}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

根据高斯定理, 有

$$\oiint_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = 0 = D_1 \Delta S_1 = \sigma_0 \Delta S_1,$$

即 $D_1 = \sigma_0$, 故在第一种介质中电场强度的大小为

$$E_1 = \sigma_0 / \epsilon_1$$

同理, 在下极板和第二种电介质中作高斯面 T , 运用高斯定理, 得

$$E_2 = \sigma_0 / \epsilon_2$$

E_1 和 E_2 的方向都是竖直向下. 由电势差的定义, 可得

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_C^B \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

由于 E_1 和 E_2 的方向均与 $d\mathbf{l}$ 方向相同, 所以上式变为

$$U_{AB} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \sigma_0$$

电容器的电容为

$$C = \frac{Q_A}{U_{AB}} = \frac{\sigma_0 S}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \sigma_0} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

四、电容器的串联和并联

在电路中使用电容器时必须注意两个指标, 一个是其电容的大小, 另一个是电容器承受电压的高低. 电容器的电容不足或过大, 当然不符合电路的要求, 而加在电容器两极板上的电势差超过了它所能承受的能力, 两极板之间的电介质就要被击穿而变为导体, 电容器就被损坏了. 因此, 在实际应用中, 当单个电容器不能同时满足上述两个指标时, 常常把两个或两个以上的电容器串联或并联起来, 组成一个等效的电容器使用.

1. 电容器的串联

如图 11.20 所示, 两个电容器串联在电路的 A, B 两点之间, 它们的电容分别为 C_1, C_2 .

容易看出, A 和 B 两点的电势差等于每个电容器两端的电势差之和, 每个极板上电量的绝对值都相等. 所以

$$U_{AB} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

串联后的等效电容 $C = q/U_{AB}$ [如图 11.20], 因此

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

对于 n 个电容分别为 $C_1, C_2 \cdots C_n$ 的电容器的串联, 同理可得其等效电容 C 满足下式

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (11-19)$$

式(11-19)表明, 各电容器串联时的等效电容总是小于其中任意一个电容器的

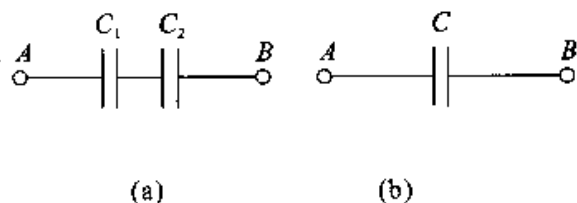


图 11.20 电容器的串联

电容,但每个电容器上的电势差总小于等效电容器两端的电势差.因而,串联电容器组具有比每个电容器都高的耐压能力.

2. 电容器的并联

如图 11.21 所示,两个电容分别为 C_1, C_2 的电容器并联在电路的 A, B 两点之间.显然,两个电容器两端的电势差相等,两个电容器极板上的电量不相同,即

$$q_1 = C_1 U_{AB}, \quad q_2 = C_2 U_{AB}$$

并联后两个电容器上的总电 q 为

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) U_{AB}$$

由于并联后等效电容器的电容 $C = q/U_{AB}$ [如图(11.21)],所以

$$C = C_1 + C_2$$

于 n 个电容分别为 $C_1, C_2 \dots C_n$ 的电容器的并联,同理可得其等效电容 C 满足下式

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (11-20)$$

上式表明,各个电容器并联后的等效电容大于其中任一个电容器的电容,但各个电容器上的电势差总是相等的.

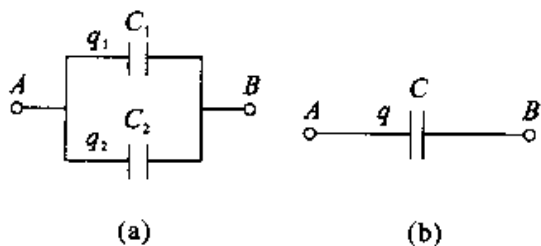


图 11.21 电容器的并联

§ 11.4 静电场的能量

一、带电体系的静电能

带电体的带电过程,可以看成是电荷之间相对移动的过程.因此,可以认为带电体上的电荷是一点点地积累起来的.在积累的过程中,后加上去的电荷要相对于先积累的电荷而移动,由于在电荷之间存在着相互作用的电场力,故在移动这些电荷时,外力必克服电场力而做功.根据能量转化和守恒定律,外力对带电体系做功,应当等于带电体系静电势能(简称静电能)的增加.静电能本身的数值是相对的.至于说到一个带电体系所包含的全部静电能,就必须说明是相对于何种状态而言的.设想带电体系中的电荷可以分割为无限多个小部分,且这些部分最初都分散在彼此相距无穷远的地方,通常规定处于这种状态下的静电能为零.于是,任何状态下的带电体系的静电能 W_e ,等于把各部分电荷从无限分散的状态聚集成现有带电体系时,抵

抗静电力所做的全部功 A 。

如果带电体系是由若干个带电体组成的,则通常把每一个带电体上的各部分电荷从无限分散的状态聚集起来时所做的功,看成是等于这个带电体的自能.然后,把每个带电体看成是一个不可分割的整体,而把各个带电体从无穷远处移到当前位置所做的功,看成是等于它们之间的相互作用能.于是,带电体系的总静电能 W_e ,可以看成是由每个带电体的自能和各个带电体之间的相互作用能组成的。

下面以平行板电容器充电过程为例,讨论电容器的静电能。

假设电容为 C 的电容器,在充电过程中某一瞬时,其极板上电量为 q ,则该瞬时电容器两极板之间的电势差为

$$U = q/C$$

如果将 dq 电量从负极板转移到正极板,则外力做功为

$$dA = Udq = (q/C)dq$$

于是,当电容器两极板分别带有 $+Q$ 和 $-Q$ 电量时,外力所做总功

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

电容器在充电过程中外力做的功就是电容器储存的静电能 W_e 。

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (11-21)$$

根据 $Q = CU$,上式又可改写为

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (11-22)$$

由式(11-22)可以看出,电势差一定时,电容器的电容愈大,其储存的能量愈多.从这个意义上讲,电容是电容器储存电能能力大小的标志。

二、静电场的能量

从上面的讨论可以看到,带电体系都具有一定的电能,那么这些电能究竟集中在电荷上还是定域于电场中呢?这个问题在静电学中无法回答,因为在静电场中电场总是伴随着电荷而存在的.但在第十七章中将会知道,变化的电场和磁场以一定速度在空间传播形成电磁波,在电磁波中电磁场可以脱离激发电磁场的场源而传播到很远的地方,且电磁波携带着能量.大量实验事实表明,电能定域于电场之中.所以,带电体系具有的能量实质上就是该体系所建立的电场能量。

下面仍以平行板电容器为例,推导静电场的能量公式.由式(11-22)知,电容器的电能 $W_e = \frac{1}{2}CU^2$,此能量应储存于电容器两极板间的电场中.由于 $U = Ed$, $C = \epsilon S/d$,所以

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Sd)$$

上式中 S 为平行板电容器极板的面积, d 为极板之间的距离,因此 Sd 为电容器两极板的体积,也就是全部电场所占空间的体积.由于极板间的电场是均匀的,因而能量的分布也应是均匀的.其单位体积内的能量,即电场的电能密度为

$$w_e = \frac{W_e}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (11-23)$$

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (11-24)$$

在电场不均匀时,总电能 W_e 应等于电能密度 w_e 的体积分,即

$$W_e = \iiint w_e dV = \iiint \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{s} dV \quad (11-25)$$

其中的积分遍及电场存在的空间.

在真空中, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, 式(11-24)简化为 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, 它纯粹是指电场的能量.

在各向同性的线性电介质中, $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$, 有

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2$$

它还包含了电介质的极化能.

在各向异性电介质中,一般而言 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 方向不同,这时必须采用普遍的表达式(11-24).对非线性有损耗的电介质,没有上述简单的结果.这时,在对电介质所做的极化功中,只有一部分转化为极化能,另一部分则转化为热能.

例 11-5 计算均匀带电球体的静电能.设球半径为 R ,带电量为 Q ,球外为真空.

分析 要求静电能,必须先求出球体在空间上的场强.由于电荷分布具有球对称性,所以在距离球心为 r 处各点场强大小一样,因此可取小体积元 $dV = 4\pi r^2 dr$,在 dV 上场强大小可认为是相同的.根据式(11-25)积分便可求出球体的静电能.

解 由高斯定理可得均匀带电球体的场强分布为

$$E = \begin{cases} Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) & (r > R) \\ Q/(4\pi\epsilon_0 R^2) & (r < R) \end{cases}$$

由式(11-25),并考虑到 $\epsilon = \epsilon_0$, $dV = 4\pi r^2 dr$, 所以球体的静电能

$$\begin{aligned} w_e &= \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

思考题

11-1 如图 11.22 所示,如果在均匀电场中放入一不带电的金属球,那么在金属球附近的电场是否仍保持均匀?为什么?

11-2 关于空腔导体内、外两个点电荷 q_1, q_2 之间的相互作用力,下列说法正确的是:(1) q_1 所受电场力为零;(2) q_2 对 q_1 的作用力为零;(3) q_2 和 S_2 面上的电荷对 q_1 的合力为零;(4) 和 S_2 面上的电荷对 q_2 的合力为零.

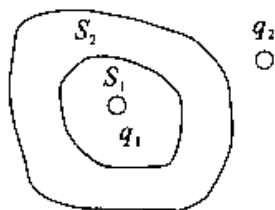


图 11.22

11-3 把一个带电物体移近一个导体壳,带电体单独在导体空腔内产生的场强是否等于零?静电屏蔽效应是如何实现的?

11-4 高斯面上各点 E 为零,则面内自由电荷电量代数和为零,极化电荷电量的代数和亦为零.上述说法是否正确?为什么?

11-5 有人说,因为 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_c$, 所以电位移矢量 D 只与自由电荷有关;若高斯面内不包围自由电荷,则面上各点 D 必为零.上述说法对吗?为什么?

11-6 平行板电容器保持板上电量不变(充电后,切断电源),若增大两板间的距离 d ,两板的电势差如何变化?两板间场强如何变化?电容是增大还是减少?

11-7 把一充电的电容器与一未充电的电容器并联,两电容器完全一样.总静电能是增加了还是减少了?

习 题

11-1 点电荷 q 处在导体球壳的中心, 壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2 (见附图), 求场强和电位的分布.

11-2 半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 d ($d \gg a$), 求单位长度的电容.

11-3 证明: 同心球形电容器两极的半径相差很小 (即 $R_B - R_A \ll R_A$) 时, 它的电容公式趋于平行板电容公式.

11-4 两线输电线的线径为 3.26mm , 两线中心相距 0.5m . 输电线位于地面上空很高处, 因而大地影响可以忽略. 求输电线单位长度的电容.

11-5 两电容器的电容之比为 $C_1 : C_2 = 1 : 2$, 把它们串联后接到电源上充电, 它们的电能之比是多少? 如果并联充电, 电能之比是多少?

11-6 空气介电强度是 30 千伏/厘米, 今有一平行板电容器, 两极板相距为 0.50 厘米, 板间是空气, 问能耐多高的电压?

11-7 同心金属球壳电荷 A 和 B 分别带有电荷 q 和 Q , 已测得间电势差为 V , 问 A, B 组成的球形电容器的电容值为何值?

11-8 如图所示, 球形电极浮在相对电容率为 $\epsilon_r = 3.0$ 的油槽中, 球的一半浸没在油中, 另一半在空气中. 已知电极所带净电荷 $Q_0 = 2.0 \times 10^{-6}\text{C}$, 问球的上下部分各有多少电荷?

11-9 一平行板空气电容器, 极板面积为 S , 板间距为 d , 充电至带电 Q 后与电源断开. 然后用外力缓缓地把两极板间距离拉大到 $2d$,

(1) 求电容器能量的改变.

(2) 求过程中外力所作的功.

(3) 讨论此过程中的功能转换关系.

11-10 在一导体球外充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质, 现测得紧邻导体球表面的介质内的场强为 E , 求导体球表面上的自由电荷面密度?

11-11 一平行板电容器极板是边长为 a 的正方形, 间距为 d , 电荷为 $\pm Q$. 把一块厚度为 d , 介电常数为 ϵ 的电介质板插入一半, 它受力多少? 方向如何?

11-12 带电 Q 半径为 R 的金属球, 求其产生的电场中储藏的静电能.

11-13 圆柱电容器由一长直导线和套在它外面的共轴导体圆筒构成, 设导线的半径为 a , 圆筒的内半径为 b . 证明: 这电容器所储藏的能量有一半是在半径 $r = \sqrt{ab}$ 的圆柱体内.

第 12 章 稳恒磁场

本章讨论恒定电流或相对参考系以恒定速度运动的电荷在真空和无限大均匀介质中激发磁场的规律和性质. 首先介绍电流和电流密度, 然后讨论描述磁场的物理量——磁感强度 B ; 电流激发磁场的规律——毕奥—萨伐尔定律; 反映磁场性质的两条基本定理——磁场的高斯定理和安培环路定理, 以及磁场对运动电荷的作用力——洛伦兹力和磁场对电流的作用力——安培力; 介质在磁场中的磁化等问题.

人们对磁现象的认识要比对电现象的认识早, 早在公元前数百年古书中就有关于磁石(它的成分是四氧化三铁 Fe_3O_4) 的记载. 我国古代人民在磁学领域做出了巨大贡献, 春秋战国时期就对磁石有了认识, 东汉时期制成司南勺, 北宋时期沈括在《梦溪笔谈》中记载采用人工磁化方法制造指南针, 沈括还比欧洲早 400 年最早发现地磁偏角.

人们早期对于磁铁基本现象的认识, 可归纳为以下几点:

(1) 磁铁具有磁性. 即磁铁具有吸引铁、钴、镍等物质的性质. 磁铁上磁性特别强的区域称为磁极. 磁极间存在着相互作用力, 称为磁力.

(2) 如果把一条磁铁折成数段, 不论段数多少或各段的长短如何, 每一小段仍将形成一个很小的磁铁, 仍具有 N 、 S 两极, 即 N 极与 S 极相互依存而不可分离. 但是, 正电荷或负电荷却可以独立存在, 这是磁现象和电现象的基本区别.

直到 1820 年, 丹麦物理学家奥斯特才发现通电导线附近小磁针发生偏转. 经过安培、毕奥、萨伐尔等人的进一步研究, 人们才认识到运动电荷周围除存在电场外, 还有磁场存在. 最后人们终于认识到电场与磁场实际上是个统一体.

§ 12.1 电流 电流密度

一、电流 电流密度

电流是由大量电荷和带电粒子定向运动形成的. 形成电流的带电粒子统称载流

子. 它们可以是电子、质子、正的或负的离子, 在半导体中还可能是带正电的“空穴”. 由带电粒子定向运动形成的电流叫做传导电流. 常见的电流是沿着一根导线流动的电流. 电流的强弱用电流[强度]来描述, 它等于单位时间里通过导线某一截面的电量. 如果在一段时间 dt 内通过某一截面的电量是 dq , 则通过该截面的电流 I 是

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (12-1)$$

在国际单位制中电流的单位名称是安[培], 符号是 A. $1\text{A} = 1\text{C/S}$.

实际上还常常遇到大块导体中产生的电流. 整个导体内各处的电流形成一个“电流场”. 例如在有些地质勘探中利用的大地中的电流、电解槽内电解液中的电流、气体放电时通过气体的电流等. 在这种情况下为了描述导体中各处电荷定向运动的情况, 引入电流密度概念.

为简单计, 设导体中只有一种载流子, 每个载流子所带电量都是 q , 但是运动速度各不相同. 以 n_i 表示单位体积内以速度 \mathbf{v}_i 运动的载流子数目, 则在 dt 时间内通过面元 $d\mathbf{S}$ 的这种速度的载流子的数目为 $n_i \mathbf{v}_i dt \cos\theta_i d\mathbf{S} = n_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{S} dt$. 在 dt 时间内通过 $d\mathbf{S}$ 的各种速度的载流子的数目就是 $\sum_i n_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{S} dt$, 单位时间内通过 $d\mathbf{S}$ 的电量, 也就是通过 $d\mathbf{S}$ 的电流强度为

$$dI = q \sum_i n_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{S} dt / dt = q \left(\sum_i n_i \mathbf{v}_i \right) \cdot d\mathbf{S}$$

以 \mathbf{v} 表示所有载流子的平均速度, 即 $\mathbf{v} = \sum_i n_i \mathbf{v}_i / n$, 其中 $n = \sum_i n_i$ 是单位体积内载流子数目, 即载流子数密度, 则上式就可以改写为

$$dI = qn\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-2)$$

引入矢量 \mathbf{J} , 并定义

$$\mathbf{J} = qn\mathbf{v} \quad (12-3)$$

则上一式可以写成

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-4)$$

这样定义的 \mathbf{J} 就叫面元 $d\mathbf{S}$ 处的电流密度. 对于正载流子, 电流密度的方向与载流子运动的方向相同; 对负载流子, 电流密度的方向与载流子的运动方向相反.

在(12-4)式中, 如果 \mathbf{J} 与 $d\mathbf{S}$ 垂直, 则 $dI = JdS$, 或 $J = dI/dS$. 这就是说, 电流密度的大小等于通过垂直于载流子运动方向的单位面积的电流.

在国际单位制中电流密度的单位名称为安每平方米, 符号为 A/m^2 .

在金属中,只有一种载流子,即自由电子.一个自由电子带有电量 e ,则金属中的电流密度为

$$J = env \quad (12-5)$$

由于电子电量为负值,所以上式中 J 与 v 的方向相反,即金属中电流密度方向与自由电子平均速度方向相反.在无外加电场的情况下,金属中的电子作无规则热运动, $v = 0$,所以不产生电流.在外加电场中,金属中的电子将有一个平均定向速度 v ,由此形成了电流.这一平均定向速度叫做漂移速度.

对于电流区域内一个有限的面 S ,通过它的电流应为通过它的各面元的电流的代数和,即

$$I = \int_S dI = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-6)$$

在大块导体中,电流密度可以各处不同,也还可能随时间变化.在本章我们只讨论恒定电流,恒定电流是指导体内各处的电流密度都不随时间变化的电流.

恒定电流有一个很重要的性质,就是通过任一封闭曲面的恒定电流为零,即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{恒定电流}) \quad (12-7)$$

如果不是这样,那么设流出某一封闭曲面的净电流大于零,即有正电荷从封闭面内流出,又由于电流不随时间改变,这一流出将永不休止.这意味着封闭面内有无穷多的正电荷或能不断产生正电荷.根据电荷守恒定律,这都是不可能的.因此,对恒定电流来说,(12-7)式必定成立.

二、欧姆定律及其微分形式

对很多导体来说,例如对一般的金属或电解液,在恒定电流的情况下,一段导体两端的电势差(或电压) U 与通过这段导体的电流 I 之间服从欧姆定律,即

$$U = IR \quad (12-8)$$

式中 R 叫导体的电阻.由于在导体中,电流总是沿着电势降低的方向,所以(12-8)式表示:经过一个电阻沿电流的方向电势降低的数值等于电流与电阻的乘积.在国际单位制中,电阻的单位名称是欧[姆],符号为 Ω .

导体的电阻与导体的长度 l 成正比,与导体的横截面积(即垂直于电流方向的截面积) S 成反比,而且还和材料的性质有关.它们之间的关系可用公式表示为

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (12-9)$$

这一公式叫做电阻定律，式中 ρ 是导体材料的电阻率。有时也用 ρ 的倒数 $\sigma = 1/\rho$ 代替 ρ 写入上式，得

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (12-10)$$

σ 叫做导体材料的电导率。在国际单位制中电阻率的单位名称是欧[姆]米，符号是 $\Omega \cdot \text{m}$ ；电导率的单位名称是西[门子]每米，符号为 S/m 。

电阻率(或电导率)不但与材料的种类有关，而且还和温度有关。一般的金属在温度不太低时， ρ 与温度 $t(^{\circ}\text{C})$ 有线性关系，即

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t)$$

其中 ρ_t 和 ρ_0 分别是 $t^{\circ}\text{C}$ 和 0°C 时的电阻率， α 叫做电阻温度系数，随材料的不同而不同。例如铜的 α 值为 $4.3 \times 10^{-3} 1/\text{K}$ ，而锰铜合金(12% 锰、84% 铜、4% 镍)的 α 值为 $1 \times 10^{-5} 1/\text{K}$ 。这说明锰铜合金的电阻率随温度的变化特别小，用它制作的电阻受温度的影响就很小，因此，常用这种材料作标准电阻。

有些金属和化合物的温度在降到接近绝对零度时，它们的电阻率突然减小到零，这种现象叫超导。超导现象的研究在理论上有很重要的意义，在技术上超导也获得了很重要的应用。

欧姆定律(12-8)式给出了电压和电流的关系，这是电场在一段导体内引起的总效果的表示。由于电场强度和电压有一定的关系，所以还可以根据(12-8)式导出电场和电流的关系，如图 12.1 所示。以 Δl 和 ΔS 分别表示一段导体的长度和截面

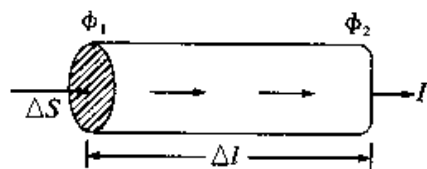


图 12.1 推导欧姆定律

积，它的电阻率为 ρ ，其中有电流 I 沿它的长度方向流动。由于电压 $U = \varphi_1 - \varphi_2 = E\Delta l$ ，电流 $I = J\Delta S$ ，而电阻 $R = \rho\Delta l/\Delta S$ ，将这些量代入欧姆定律(12-8)式就可以得到

$$J = E/\rho = \sigma E$$

实际上，在金属或电解液内，电流密度 J 的方向与电场强度 E 的方向相同，因此又可写成

$$J = \sigma E \quad (12-11)$$

这一和欧姆定律等效的关系式表示了导体中各处的电流密度与该处的电场强度的关系，可以叫做欧姆定律的微分形式。

§ 12.2 磁场 磁感强度

一、磁场

实验表明,静止电荷的周围空间只存在静电场,而任何运动电荷或电流的周围空间,除了和静止电荷一样存在电场之外,还存在磁场.电场对处于其中的任何电荷(不论运动与否)都有电场力作用;而磁场则只对运动电荷有磁场力作用.一切磁现象都是运动电荷之间的相互作用.磁铁与磁铁之间、电流与磁铁之间以及电流与电流之间的相互作用,是通过磁场来实现的.也就是说,任何磁铁、电流或运动电荷周围空间里都存在着磁场,而它们之间的相互作用实际上是磁场间的相互作用,是磁场力的具体表现.

永磁体也是由分子和原子组成的,在其分子内部,电子和质子等带电粒子的运动也形成微小的电流,叫分子电流.当其内部的分子电流都按一定的方式排列起来就成了永磁体,一个永磁体与其他永磁体或电流的相互作用,实际上就是这些已排列整齐分子电流之间或它们与导线中定向运动的电荷之间的相互作用,因此它们的相互作用也是运动电荷之间相互作用的表现.

二、磁感强度

磁铁、载流导线和运动电荷周围都伴随着磁场.我们可以利用磁场对试探的运动点电荷或电流元有磁场力作用,引入磁感强度 B 这一物理量,来描述磁场.

实验证明运动电荷在磁场中受的力与电荷种类、电量大小、磁场强弱、电荷运动速度大小、速度方向与磁场方向夹角有关.

(1) 在磁场中总有一个特殊方向,当电荷在磁场中沿该方向运动时不受力,该方向称为零力线方向.显然该方向与运动试探电荷无关,反映了磁场本身的性质.规定该方向为磁感强度矢量 B 的方向,具体的指向在下面给出.

(2) 当点电荷垂直于磁场方向运动时,它所受的磁场力最大,用 F_{\max} 表示.但对

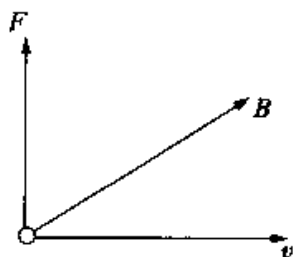


图 12.2 电荷在磁场的受力图

磁场中某一定点而言, F_{\max} 与 qv 的比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 是一个与 q 和 v 的大小都无关的恒量, 这恒量仅与磁场在该点的性质有关. 定义磁感强度 B 的大小为

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (12-12)$$

(3) 从图 12.2 及(2)可知, 磁场力 F 既与运动电荷的速度 v 垂直, 又与磁感强度 B 相垂直, 且相互构成右手螺旋系统, 故它们间的矢量关系式可写成

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12-13)$$

如 v 与 B 之间夹角为 θ , 那么 F 的大小为

$$F = qvB \sin\theta \quad (12-14)$$

显然, 当 $\theta = 0$ 或 π , 即 $v \parallel B$ 时, $F = 0$; 当 $\theta = \pi/2$, 即 $v \perp B$ 时, $F = F_{\max}$, 这与实验结果都是一致的. 最后还需指出, 对正电荷 ($+q$) 来说, F 的方向与 $v \times B$ 的方向相同; 而负电荷 ($-q$) 的 F 则与 $v \times B$ 的方向相反.

磁感强度的国际单位是 T, 叫做特斯拉 (Tesla), 简称特, 另一单位为高斯 (G), 它们之间的换算关系是 $1\text{T} = 10^4\text{G}$.

表 12-1 一些地方的磁感强度

核表面	约 10^{12}T	地球表面	约 $5 \times 10^{-5}\text{T}$
脉冲星表面	约 10^8T	人体磁场	约 $3 \times 10^{-10}\text{T}$
太阳表面	约 10^{-2}T	磁屏蔽盒内	约 $3 \times 10^{-14}\text{T}$

§ 12.3 毕奥 — 萨伐尔定律

一、毕奥 — 萨伐尔定律

设在真空中有电流强度为 I 的任意形状的载流导线, 其导线截面尺寸与所考察的场点的距离比较可略去不计, 这样的电流称为线电流. 在线电流上取长为 dl 的定向线元 $d\mathbf{l}$, 规定 $d\mathbf{l}$ 的方向与线元内电流 I 的方向相同, 并将乘积 $I d\mathbf{l}$ 称为电流元, 如图 12.3(a) 所示. 毕奥 — 萨伐尔等人的分析证明, 电流元 $I d\mathbf{l}$ 在任一场点 P 产生的磁场的磁感强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元的大小 $I d\mathbf{l}$ 成正比, 与电流元到 P 点的距离 r 的平方成反比, 还与 $I d\mathbf{l}$ 同 r 之间夹角的正弦 $\sin\theta$ 成正比 (r 是从电流元到 P 点的位矢),

即

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} \quad (12-15)$$

式中 μ_0 叫真空磁导率, 其值为

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$$

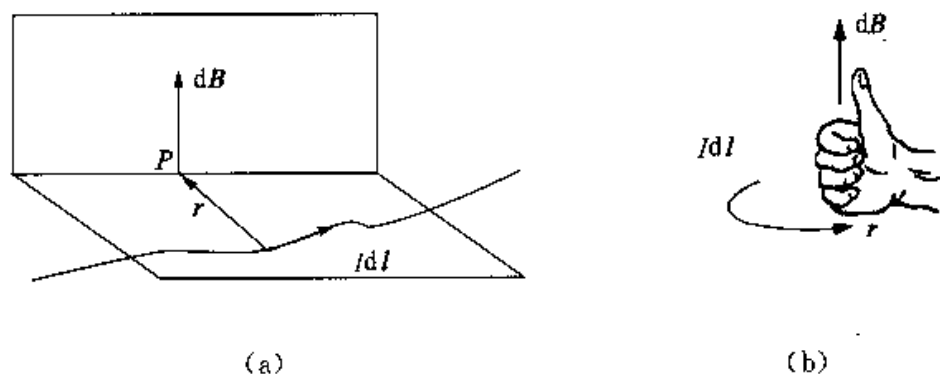


图 12.3 磁场方向判断

分析表明, dB 的方向总垂直于 dI 与 r 所构成的平面(见图 12.3), dB 方向可由右手螺旋法则判断: 伸出右手, 让大拇指与其余四指垂直, 四指由 Idl 方向沿着 Idl 与 r 小于 180° 夹角方向转向 r , 大拇指所指的方向就是该点 dB 的方向. 故可用矢量式表示为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times e_r}{r^2} \quad (12-16)$$

这就是毕奥—萨伐尔定律. 式中 e_r 为沿矢量 r 的单位矢量.

二、磁场的叠加原理

实验证明, 磁场也服从叠加原理, 也就是说, 整个载流导线在空间中某点所激发的磁感强度 B , 就是这导线上所有电流元在该点激发的磁感强度 dB 的叠加(矢量和), 用积分式可表示为

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times e_r}{r^2} \quad (12-17)$$

对于闭合电流, 有

$$B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times e_r}{r^2}$$

三、运动电荷的磁场

由于电流是运动电荷形成的,所以可以从毕奥—萨伐尔的电流元的磁场公式导出匀速运动电荷激发的磁场公式.对图 12.4 中的电流元,设导线的截面积为 S ,导线中只有一种载流子,其电荷电量为 q ,电荷数密度为 n ,定向漂移速度为 v , v 的方向与 I 方向相同.整个电流元 $I dl$ 在空间 P

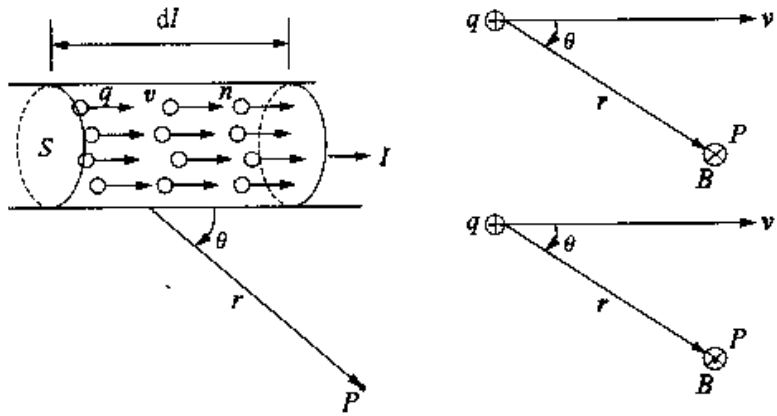


图 12.4

点产生的磁场可以认为是这些以同样速度 v 运动的载流子在 P 点产生的磁场的同向叠加.电流元在 P 点产生的磁感强度 dB 为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times e_r}{r^2}$$

根据电流的定义有 $I = \frac{dq}{dt} = \frac{qnSdl}{dt} = nqSv$,此电流元内的载流子数目 $dN =$

$nSdl$,因此,一个载流子在 P 点产生的磁场 $B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi nSdl} \frac{nqSv dl \times e_r}{r^2}$

由于 v 的方向与 I 方向相同, $v dl = v dl$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times e_r}{r^2} \quad (12-18)$$

例 12-1 电子在氢原子的玻尔第一轨道上作圆周运动,求运动的电子在核处产生的磁感强度的大小.(已知玻尔第一轨道半径为 0.53 埃)

解 电子与核的库仑力就是电子作圆周运动的向心力

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} = 2.2 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

利用(12-18)式,所求的磁感强度的大小

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi} \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.2 \times 10^6}{(0.53 \times 10^{-10})^2} = 12.5 \text{ T}$$

四、毕奥—萨伐尔定律应用举例

由毕奥—萨伐尔定律和磁场叠加原理原则上可以求解任意载流导体的磁场,具体步骤为:

(1) 首先,将载流导线划分为一段段电流元,任选一段电流元 Idl ,并标出 Idl 到场点的位矢 r ,确定两者的夹角 (Idl, r) ;

(2) 根据毕奥—萨伐尔定律的公式,求出电流元 Idl 在场点所激发的磁感强度 dB 的大小,并由右手螺旋法则决定 dB 的方向;

(3) 建立坐标系,将 dB 在坐标系中分解,并用磁场叠加原理作对称性分析,以简化计算;

(4) 就整个载流导线对 dB 的各个分量分别积分,一般在直角坐标系中

$$B_x = \int_L dB_x, \quad B_y = \int_L dB_y, \quad B_z = \int_L dB_z$$

对积分结果进行矢量合成,求出磁感强度 B ;即

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

1. 直线电流的磁场

设有载流直导线(简称直电流),其电流强度为 I ,试计算场点 P 的磁感强度.

(1) 建立合适的坐标系:取坐标如图 12.5 所示.

(2) 任取一电流元 Idl ,由毕奥—萨伐尔定律,电流元 Idl 在 P 点的磁感强度 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{e}_r}{r^2}$,其大小为 $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$,方向垂直纸面向里 \otimes .

(3) 统一积分变量:式中 r, x 两个变量可通过关系式

$$r = \frac{x}{\sin\theta} \quad l = -x \cot\theta \quad dl = \frac{rd\theta}{\sin^2\theta}$$

使被积函数化简为单一变量 θ 的函数.

(4) 然后进行积分:由于所有电流元在 P 点产生的 dB 都有相同的方向(垂直于纸面向里)所以,直电流在 P 点的 B 的方向也应垂直纸面向里,而其大小等于 dB 的积分,即

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

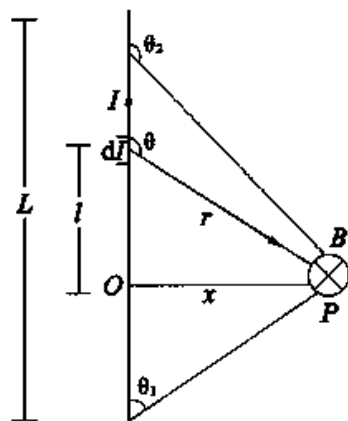


图 12.5

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin\theta d\theta}{x}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (12-19)$$

注意式中各物理量(x, θ_1, θ_2)的意义: x 为场点 P 到通电导线的垂直距离; θ_1 为起端电流方向与起端矢径方向的夹角; θ_2 为末端电流方向与末端矢径方向的夹角.

(5) 讨论:若导线为无限长, $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$,则

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (12-20)$$

在实际问题中,若直导线的长度远大于从导线到场点 P 的距离,就能近似应用上述公式.

若导线为半限长, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \pi$,则

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \quad (12-21)$$

思考 载流直导线延长线上任一点的磁感强度为何值?如果用无限长载流导线的磁场结论求无限大载流平面的磁场;宽度为 $2a$ 的无限长载流平面的磁场;无限长载流圆柱面(或半圆柱面)的磁场?电流密度已知.

2. 圆形电流轴线上的磁场

设有单匝载流线圈(也称圆电流),其半径为 R ,通有电流 I ,试计算它在其轴线上任一点 P 的磁感强度.(如图12.6)

选定如图坐标系,圆电流上任一电流元 Idl 在 P 点产生的磁感强度的大小 dB 由图可见,圆电流上各个电流元在 P 点产生的 dB 有不同的方向.为了求矢量和,将 dB 分解为平行于 x 轴的分量 dB_x .由于圆电流对 x 轴对称,其分量逐对抵消,而 B 的大小仅为平行分量 dB_x 之和.显然, B 的方向与圆电流环绕方向呈右手螺旋关系(见图12.6)

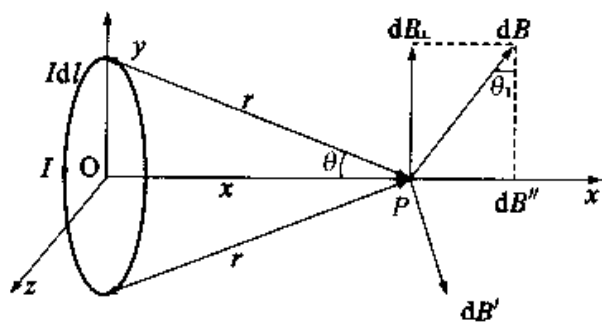


图 12.6 圆电流轴线上的磁场

Idl 电流元在圆电流中心轴线上任一点的场强的大小 $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$.

dB 的平行分量 $dB_x = dB \sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{r^3}$, 式中 $\sin\theta = \frac{R}{r}$.

$$B = \oint dB_{\perp} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (12-22)$$

(1) 在圆电流的圆心 O 处, $x = 0$, 故得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (12-23)$$

(2) 若考虑场点 P 远离圆心, 且有 $x \gg R$, 所以又得

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3} \quad (12-24)$$

因圆电流的面积为 $S = \pi R^2$, 故上式可写成

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3}$$

圆电流与永磁圆片两者外围的磁感线分布非常相似的. 因此, 与永磁片对应, 圆电流也好像存在 N 和 S 两个等效“磁极”. 而由两异性磁极构成的系统称为磁偶极子, 故圆电流与一个磁偶极子等效.

仿照电偶极子的电矩, 可引入与圆电流等效的磁偶极子的磁矩(称为载流线圈的磁矩)

$$m = NISn_0 \quad (12-25)$$

式中 N 为线圈的匝数; S 为线圈的面积; n_0 代表线圈平面的法向单位矢量, 其方向与电流流向呈右手螺旋关系(见图 12.7)

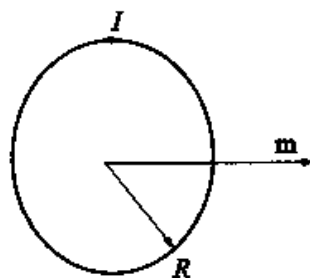


图 12.7 圆电流的磁偶极矩

将式(12-25)代入式(12-22)式, 并设 $N = 1$, 可得

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (12-26)$$

3. 螺线管电流轴线上的磁场

密绕在圆柱而上的螺旋线圈称为螺线管(如图 12.8). 设螺线管的半径为 R , 线圈中通有电流 I , 沿管长方向每单位长度上匀绕 n 匝, 每匝线圈可近似看作平面线圈, 下面计算在轴线上任一场点 P 的磁感强度.

取场点 P 为坐标原点, x 轴与管轴重合, 则在 x 到 $x + dx$ 的间隔中共有 $n dx$ 匝线圈(见图 12.7), 将它看作是电流为 $nI dx$ 的“圆电流”, 它在 P 点产生的磁感强度的大小可借用(12-22)式得到

$$dB = \frac{\mu_0 nIR^2 dx}{2\pi r^3}$$

其中

$$R = r \sin \theta, \quad x = R \cot \theta, \quad dx = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

代入上式

$$dB = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta$$

$d\mathbf{B}$ 的方向与“圆电流”环绕方向成右手螺旋关系,即沿 x 轴方向. 整个螺线管电流可以当成由许多这样的“圆电流”组成,而各“圆电流”产生的 $d\mathbf{B}$ 都有相同的方向,所以螺线管电流磁场在 P 点的磁感强度的大小

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (12-27)$$

下面考虑两种特殊情形:

(1) 螺线管为无限长,即管长 $L \gg R$

这时有 $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$, 于是得到

$$B = \mu_0 n I \quad (12-28)$$

(2) 半无限长螺线管一端的磁场,即在螺线管左右两个端面的圆心处,例如在端面的圆心上有 θ_1

$= \frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0$; 于是得到两处的磁感强度的大小

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad (12-29)$$

一个有限长载流螺线管轴线上各点的磁感应强度值随 x 的变化如图 12.9 所示. 当 $I \gg R$ 时,在螺线管中部很大范围内磁场近于均匀,只在端面附近才显著下降.

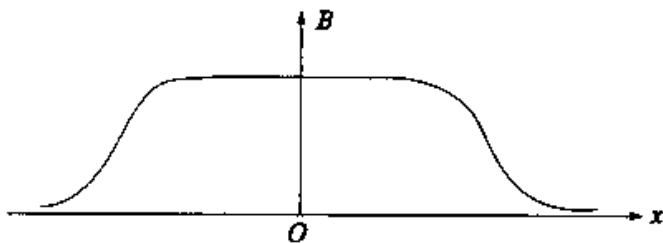


图 12.9 通电直螺线管轴上的磁场分布

例 12-2 通有电流 I 的一条无限长直导线,中部被弯成半径 R 的半圆环(如图 12.10),求环心 O 处的磁感强度.

分析 环心 O 处的磁感强度 \mathbf{B} 可以看成一端为无限长的两条直电流 AB, DE 和半圆环电流 BCD 三者 在点 O 所激发的磁感强度之矢量和. 为此,我们先求每段电流在点 O 处的磁感强度.

解 在载流导线 AB 上所取的任一个电流元 $I dl$, 其引向 O 点的位矢 r 均重合在同一直线 ABO 上, 即 $(dl, r) = 0$, 从而, $\sin(dl, r) = 0$, 因此

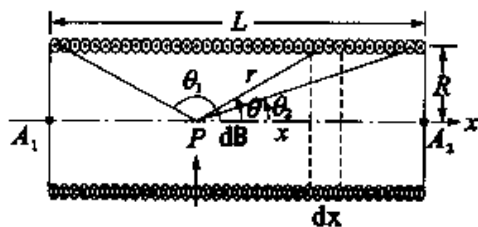


图 12.8 通电直螺线管轴线上磁感应强度计算

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

于是, $B_{AB} = \int_{AB} dB$ 等于零. 同样, 对于 DE 段, 因 $(dl, r) = \pi$, 它在点 O 的磁感强度 B_{DE} 亦等于零.

所以, 总的磁感强度 B 就等于半圆形电流在中心 O 点的磁感强度. 其方向如图所示, 为 \otimes , 其大小为

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 90^\circ}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi R} \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0 \pi I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R} \end{aligned}$$

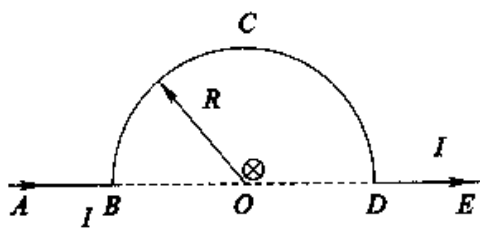


图 12.10

§ 12.4 磁场的高斯定理

一、磁感线

为了形象地反映磁场的分布情况, 就像在静电场中用电场线来表示静电场分布那样, 我们将用一些想像的曲线来表示磁场的分布. 给定磁场中某一点磁感强度的大小和方向都是确定的, 因此, 我们规定曲线上每一点切线方向就是该点的磁感强度 B 的方向, 而曲线的疏密程度则表示磁感强度 B 的大小. 这样的曲线称为磁感线或 B 线. 注意磁感线是假想的, 人为画出来的, 实际并非存在.

下图分别为直流电、圆电流、螺线管电流的磁感线图形.

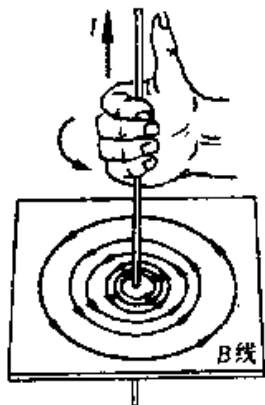


图 12.11

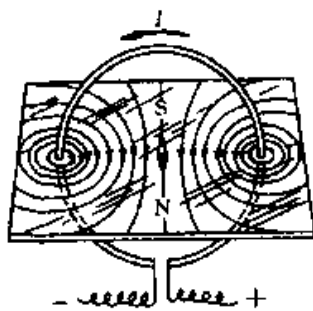


图 12.12

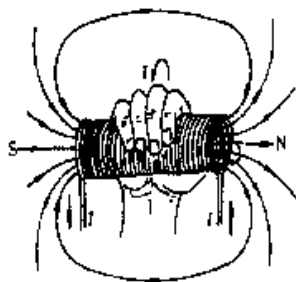


图 12.13

从图中可看出磁感线具有如下特性:

(1) 在任何磁场中每一条磁感线都是环绕电流的无头无尾的闭合线,即没有起点也没有终点,而且这些闭合线都和闭合电路互相套连,同时磁感线不相交.

(2) 在任何磁场中,每一条闭合的磁感线的方向与该闭合磁感线所包围的电流流向服从右手螺旋法则.

二、磁通量

为了使磁感线也能够定量地描述磁场的强弱,我们规定:通过某点处垂直于 B 矢量的单位面积上通过的磁感线条数,等于该点 B 矢量的大小, $B = \frac{dN}{dS_{\perp}}$. 也就是说,磁感强度 B 就是通过单位垂直面积的磁感线数目,即磁感线的数密度,磁感线密集的地方磁感强度大,磁感线稀疏的地方磁感强度小. 在均匀磁场中,磁感线是一组间隔相等的同方向平行线,对非均匀磁场,磁感线相互不平行,各处磁感线密度不相等.

类似静电场中引入电通量那样,在稳恒磁场中引入磁通量,用 Φ_m 表示. 在磁场中设想一个面积元 dS ,并用单位矢量 n 标示它的法线方向, n 与该处 B 矢量之间的夹角为 θ ,根据磁感线密度的规定,穿过 dS 的磁通量 $d\Phi_m$ 为

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cos\theta dS \quad (12-30)$$

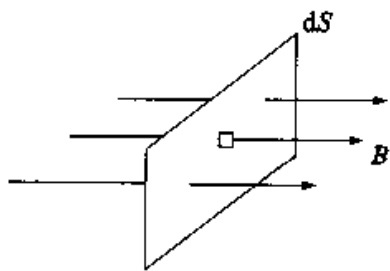


图 12.14

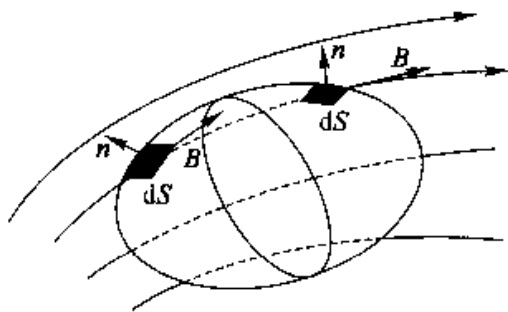


图 12.15

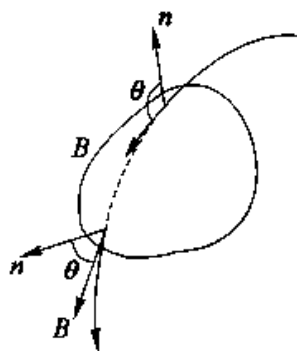


图 12.16

通过某一有限曲面 S 的磁通量为

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B \cos\theta dS \quad (12-31)$$

在磁场中穿过某一闭合曲面的磁通量为

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12-32)$$

磁通量是代数值,有正负.因此,在计算磁通量时,首先应该确定曲面的任一面积元 dS 的法线 \mathbf{n} 的正方向, $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\Phi_m > 0$; $\theta > \frac{\pi}{2}$, $\Phi_m < 0$ (如图 12.16);其次是计算磁场穿过其上任一面积元的磁通量 $d\Phi_m$,然后再计算整个曲面的磁通量.

在国际单位制中, Φ_m 的单位是 Wb,称为韦伯,称筒韦. $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$.

三、磁场的高斯定理

对一闭合曲面来说,一般取向外的指向为正法线的指向.这样从闭合面穿出的磁通量为正,穿入的磁通量为负.由于磁感线是闭合线,有几条磁感线进入闭合曲面,必然有相同条数的磁感线穿出闭合曲面.所以,通过任何闭合曲面的总磁通量必为零.

磁场中的高斯定理表述为:磁场中通过任一封闭曲面的磁通量一定为零.数学表达式为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12-33)$$

如果在穿入处取一面元 dS ,通过其边缘各点的磁感线围成一环状的磁感管.任意载流回路产生的磁感管的粗细,一般来说是不均匀的.磁场的高斯定理说明,由一端进入一段磁感管的磁通量在数值上等于由另一端穿出的磁通量.可以断定,磁感管膨胀的地方,磁场较弱,磁感管收缩的地方,磁场较强.

§ 12.5 磁场的安培环路定理

一、安培环路定理

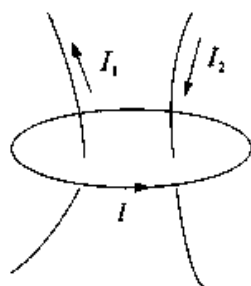
在真空中的稳恒磁场中,磁感强度 \mathbf{B} 沿任何闭合路径的线积分(也叫做 B 的环流),等于这闭合路径所包围的各个电流之代数总和的 μ_0 倍(μ_0 为真空磁导率).这个结论称为安培环路定理.它的数学表达式是

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i \quad (12-34)$$

按照安培环路定理, 环路所包围电流之正负服从右手螺旋法则, 取回路的绕行方向为正方向, 伸出右手, 让弯曲四指沿着绕行正向, 沿大拇指指向的电流为正, 即 $I > 0$, 反之为负, 即 $I < 0$.

若积分回路 L 的绕行方向不变, 电流反向, 则

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I = \mu_0 (-I)$$



如果闭合路径 l 包围着两个流向相反的电流 I_1 和 I_2 (如图 12.17 图 12.17 包围两个所示), 按图中选定的闭合路径 l 的绕行方向, B 矢量沿此闭合路径的反向电流的环流的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 [I_1 - I_2]$$

如果闭合路径 l 包围的电流等值反向, 或者环路中并没有包围电流, 则

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

下面以长直载流导线产生的磁场为例, 证明安培环路定理的正确性. 在长直载流导线的周围作三个不同位置, 且不同形状的环路, 可以证明对磁场中这三个环路, 安培环路定理均成立.

1. 取对称环路包围电流

在垂直于长直载流导线的平面内, 以载流导线为圆心作一条半径为 r 的圆形环路 l , 由本章第三节知, 在这圆周上任一点的磁感强度 B 的大小为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, 其方向与圆周相切. 取环路绕行的正方向为逆时针方向, 在回路上取线元矢量 $d\mathbf{l}$, 则 \mathbf{B} 与 $d\mathbf{l}$ 间的夹角 $\theta = (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 0$, \mathbf{B} 沿这一环路 l 的环流为

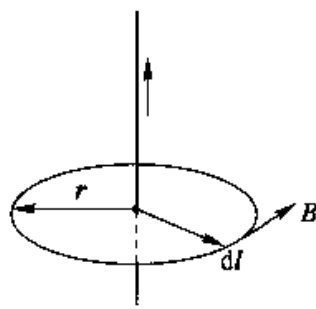


图 12.18 通电直导线在圆形环路中心

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B \cos 0 dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint dl$$

式中积分 $\oint dl = 2\pi r$ 是环路的周长. 于是上式可写成为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

从上式可以看出, \mathbf{B} 沿此圆形环路的环流 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 只与闭合环路所包围的电流 I

有关,而与环路的大小、形状无关.

2. 取任意环路包围电流

在垂直于长直载流导线的平面内,环绕载流直导线作一条如图 12.19 所示的任意环路 L ,取环路的绕行方向为逆时针方向.

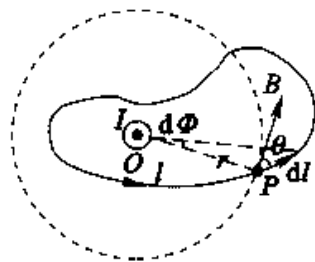


图 12.19

在环路上任取一段线元 dl ,载流直导线在线元 dl 处的磁感强度 B 大小为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, B 与 dl 的夹角为 θ ,则 B 对 dl 的线

积分为 $B \cdot dl = B \cos\theta dl$,直导线中心对线元的张角为 $d\Phi$,则有 $dl \cos\theta = r d\Phi$,所以有 $B \cdot dl = Br d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\Phi$.可见, B 对 dl 的线积分与它到直导线的距离无关.

那么 B 对整个环路的环流值为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I$$

上述计算再次说明 B 的环流值 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 与环路的大小、形状无关.

3. 取任意环路不包围电流

在垂直于长直载流导线的平面内,在载流直导线的外侧作一条如图 12.20 所示的任意环路 L ,取环路的绕行方向为逆时针方向.

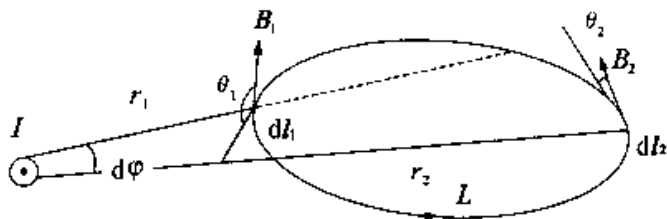


图 12.20 回路不包围电流

以载流直导线为圆心向环路作两条夹角为 $d\varphi$ 的射线,在环路上截取两个线元 dl_1 和 dl_2 , dl_1 和 dl_2 距直导线圆心的距离分别为 r_1 和 r_2 ,直导线在两个线元处的磁感强度分别为 B_1 和 B_2 .从图上可以看出 $\theta_1 = (\mathbf{B}_1, d\mathbf{l}_1) > \frac{\pi}{2}$,而 $\theta_2 = (\mathbf{B}_2, d\mathbf{l}_2) < \frac{\pi}{2}$.

利用安培环路定理的证明之二的结论可知

$$\mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = -B_1 r_1 d\varphi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$-\mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = -B_2 r_2 d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

所以有

$$\mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0,$$

从载流直导线中心 O 出发, 可以作许多条射线, 将环路分割成许多成对的线元, 磁感强度对每对线元的标量积之和, 都有上式的结果, 故 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 即环路不包围电流时, B 的环流值为零.

安培环路定理反映了磁场的基本规律. 和静电场的环路定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 相比较, 稳恒磁场中 \mathbf{B} 的环流 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, 说明稳恒磁场的性质和静电场不同, 静电场是保守场, 而稳恒磁场是非保守场.

二、安培环路定理的应用

尽管安培环路定理是普适的, 但利用安培环路定理求磁场是有条件的. 如果在某个载流导体的稳恒磁场中, 可以找到一条闭合环路 l , 该环路上的磁感强度 \mathbf{B} 大小处处相等, \mathbf{B} 的方向和环路的绕行方向也处处同向, 这样利用安培环路定理求磁感强度 \mathbf{B} 的问题, 就转化为求环路长度, 以及求环路所包围的电流代数和的问题, 即

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = \mu_0 \sum I_i.$$

在磁场中能否找到上述的环路, 取决于该磁场分布的对称性, 而磁场分布的对称性又来源于电流分布的对称性. 由于无限长载流直导线, 无限载流圆柱面或圆柱体, 无限长载流密绕螺线管, 密绕螺绕环, 无限大均匀载流平面等产生的磁场具有轴对称、平面对称分布, 可以用安培环路定律求解.

利用安培环路定理求磁场的基本步骤:

- (1) 首先用磁场叠加原理对载流体的磁场作对称性分析;
- (2) 根据磁场的对称性和特征, 选择适当形状的环路, 并规定绕行正向;
- (3) 求回路积分 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$;
- (4) 计算回路所包围电流的代数和;
- (5) 利用公式(12-34)求磁感强度.

1. 长直载流螺线管内的磁场

用磁场叠加原理作对称性分析:可将长直密绕载流螺线管看作由无穷多个共轴的载流圆环构成,其周围磁场是各匝圆电流所激发磁场的叠加结果.在长直载流螺线管的中部任选一点 P ,在 P 点两侧对称性地选择两匝圆电流,由圆电流的磁场分布可知,二者磁场叠加的结果,磁感强度 \mathbf{B} 的方向与螺线管的轴线方向平行.

由于长直螺线管可以看成无限长,因此在 P 点两侧可以找到无穷多匝对称的圆电流,它们在 P 点的磁场迭加结果与图上相似.由于 P 点是任选的,因此可以推知长直载流螺线管内各点磁场的方向均沿轴线方向.磁场分布如图 12.21 所示.

从图上可以看出,在管内的中央部分,磁场是均匀的,其方向与轴线平行,并可按右手螺旋法则判定其指向;而在管的外侧贴近管壁处,磁场很微弱,可忽略不计,即 $B = 0$.

根据长直载流螺线管中段的磁场分布特征,可以选择如下图所示的矩形环路及绕行方向.则环路 ab 段的 $d\mathbf{l}$ 方向与磁场 \mathbf{B} 的方向一致,即 $(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 0$;环路 bc 段和 da 段的 $d\mathbf{l}$ 方向与磁场 \mathbf{B} 的方向垂直,即

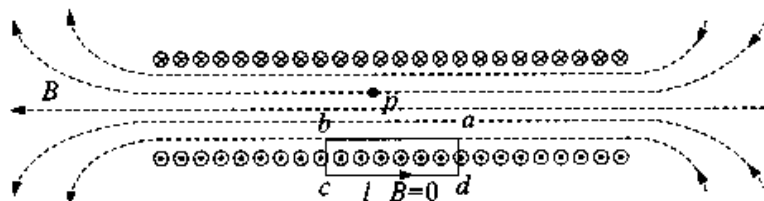


图 12.21

$$\int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

环路 cd 段上的 $B = 0$. 于是,沿此闭合路径 l ,磁感强度 \mathbf{B} 的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b B \cos 0 dl + \int_b^c B dl + \int_c^d 0 dl + \int_d^a B dl = \int_a^b B dl$$

因为 ab 段的磁场是均匀的,可以从积分号中提出,则上式成为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \int_a^b dl = B \overline{ab}$$

设螺线管上每单位长度有 n 匝线圈,通过每匝的电流是 I ,则闭合路径所围绕的总电流为 nI ,根据右手螺旋法则,其方向是正的.按安培环路定理,有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \int_a^b dl = B \overline{ab} = \mu_0 n \overline{ab} I$$

$$B = \mu_0 n I \quad (2-35)$$

注意对于绕得不紧的载流螺线管,其磁场的分布就不是如此.对于绕得不紧的均匀载流螺线管,由图 12.22 可以看到,在靠近导线处的磁场和一条长直载流导线附近的磁场很相似,磁感线近似为围绕导线的一些同心圆.管内、外的磁场是不均匀的,仅在螺线管的轴线附近,磁感强度 B 的方向近乎与轴线平行.

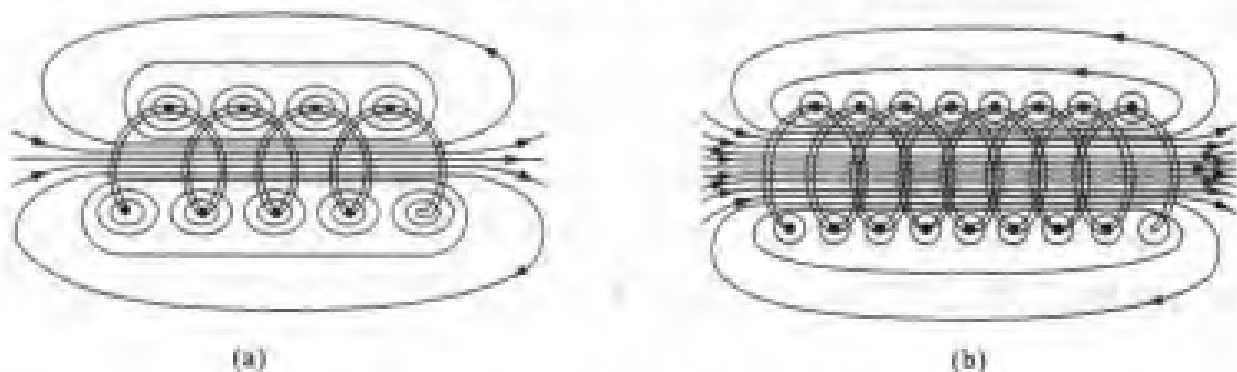


图 12.22 非密绕载流螺线管的磁场分布

2. 均匀密绕螺绕环的磁场

对于如图 12.23 所示的均匀密绕螺绕环,由于整个电流的分布具有中心轴对称性,因而磁场的分布也应具有轴对称性,因此,利用安培环路定理可以解得均匀密绕螺绕环内部的磁场分布.

将通有电流 I 的矩形螺绕环沿直径切开,其剖面图如下图所示.

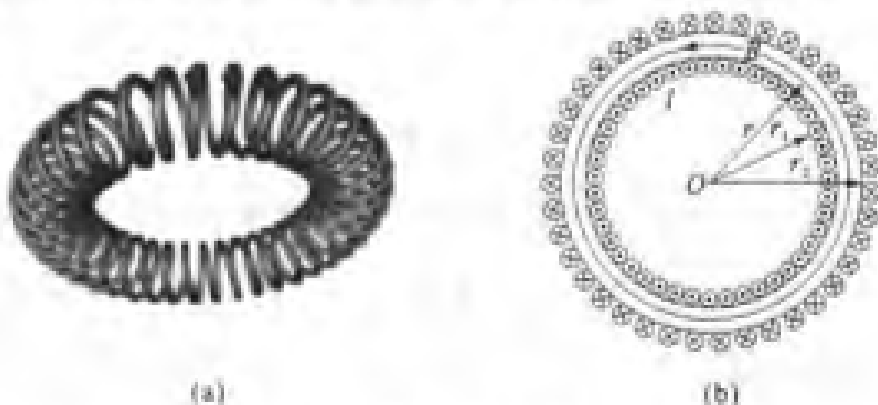


图 12.23 螺绕环及其磁场分布

在环内作一个半径为 r 的环路,绕行方向如图所示.环路上各点的磁感强度大小相等,由右手螺旋法可知方向为逆时针方向,取环路绕行方向和磁场方向一致.磁感强度 B 沿此环路的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B \cos 0 dl = B \oint dl = B 2\pi r$$

环路内包围电流的代数和为 $\sum I_i = NI$. 根据安培环路定理, 有

$$B2\pi r = \mu_0 NI,$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (r_1 < r < r_2) \quad (12-36)$$

如果 $r_2 - r_1 \ll r_1$, $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \approx \frac{\mu_0 NI}{2\pi r_1} = \mu_0 nI$, 类似长直螺线管磁场公式.

如果 $r > r_2$, $\sum I = 0, B = 0$.

对均匀密绕螺绕环, 环上的线圈绕得很密, 则磁场几乎全部集中于管内, 在环的外部空间, 磁感强度处处为零, 即 $B = 0$.

3. 无限大均匀载流平面的磁场

对无限大载流平面产生的磁场, 同样可以进行对称性分析, 如图 12.24 所示, 可以将无限大载流平面的磁场看成是由无穷多个平行的长直载流导线的磁场叠加而成. 每一对对称的直导线在 P 点的磁场叠加的结果是, 垂直于载流平面的分量都相互抵消, 只剩下平行于载流平面的分量, 故载流平面产生的磁场, 其方向与平面平行, 与平面电流成右手螺旋方向.

根据无限大载流平面磁场的分布, 可以选择如图所示的矩形环路及绕行方向.

环路上 ab 段和 cd 段上的 $d\mathbf{l}$ 方向与磁场 \mathbf{B} 的方向一致, 即 $(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = 0$;

环路 bc 段和 da 段的 $d\mathbf{l}$ 方向与磁场 \mathbf{B} 的方向垂直, 即 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$. 于是, 沿此闭合路径 l 磁感强度 \mathbf{B} 的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b B \cos 0^\circ dl + \int_b^c B dl + \int_c^d B \cos 0^\circ dl + \int_d^a B dl = 2 \int_a^b B dl$$

设无限大载流平面上的电流密度为 j , 环路所包围的电流为 $j \overline{ab}$, 于是根据安培环路定理有

$$2 \int_a^b B dl = 2B \overline{ab} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 j \overline{ab}$$

$$B = \mu_0 j / 2 \quad (12-37)$$

方向如图 12.24 所示.

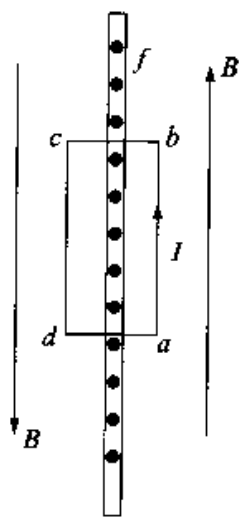


图 12.24 无限大载流平面磁场分布

§ 12.6 磁场对运动电荷的作用

一、洛伦兹力

实验和理论证明,电荷为 q ,运动速度为 \boldsymbol{v} 的带电粒子,在磁感强度为 \boldsymbol{B} 的磁场中,所受的磁场力为

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (12-38)$$

此力 \boldsymbol{F}_m 通常称为洛伦兹力,此公式称为洛伦兹公式.洛伦兹力的大小为

$$F_m = |q| vB \sin\theta$$

从上式可以看出,洛伦兹力 \boldsymbol{F}_m 的大小不仅和 $q, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}$ 的大小有关,而且取决于 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{B} 之间的夹角的正弦 $\sin\theta$.

当 $\theta = 0$ 或 π 时, $\boldsymbol{v} // \boldsymbol{B}, F_m = 0$. 此时,运动电荷不受磁力作用.

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}, F_m = qvB$. 此时,运动电荷受到最大的磁力作用.洛伦兹力的方向服从右手螺旋法则.

运动电荷带电量 q 的正负不同,即使在 $q, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}$ 均相同的情况下,洛伦兹力的方向也不同.当 $q > 0$ 时,磁场力的方向服从右手螺旋法则.当 $q < 0$ 时,磁场力的方向与右手螺旋法则的方向相反.

由于洛伦兹力始终与运动方向垂直,故洛伦兹力对运动电荷永不做功.洛伦兹力公式是安培定律的微观形式.洛伦兹公式是洛伦兹在 20 世纪初首先根据安培定律导出的,之后在实验上得到了验证.

二、带电粒子在均匀磁场中的运动

带电粒子在均匀磁场中运动时,速度 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{B} 的夹角不同,粒子的运动轨迹类型就不同,这样可以获得不同的实际应用.

-带电粒子垂直进入均匀磁场,粒子将作圆周运动,洛伦兹力是粒子作圆周运动的向心力,故有

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$\text{圆周运动的回旋半径为} \quad R = \frac{mv}{qB} \quad (12-39)$$

圆周运动的周期为
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (12-40)$$

1. 速度选择器

使两块平行金属极板分别带上正、负电荷,在两板间区域内形成一个均匀电场 E ;同时施加一个垂直于电场方向的均匀磁场 B .当带正电粒子以速度 v 进入此区域时,将同时受到向右的静电力 $F_e = qE$ 和向左的洛伦兹力 $F_m = qvB$ 作用.

当 $F_e = F_m$ 时,即 $qE = qvB$,粒子的速度 v 满足

$$v = \frac{E}{B} \quad (12-41)$$

带电粒子方可作匀速直线运动,穿越这个区域.

2. 电子回旋加速器

回旋加速器是原子核物理中获得高速粒子的一种装置.其基本结构如图 12.26.两个 D 型盒中是均匀磁场,在两个 D 型盒之间的两个电极上加有交变电压.由于电子在加速的过程中,在磁场中的回旋周期与速度无关,只要保持每经过半个周期电场改变一次方向,就可以将电子加速到很大的值.

分析 设一带电粒子被引入两半盒中电场区,被电场加速后,速度达到 v_1 进入 D_1 盒,在磁场力作用下以回旋半径 R_1

$= \frac{mv_1}{qB}$ 运动半个圆周又进入电场区,再次被与前次反向的电

场加速至 v_2 后进入 D_2 盒,在 D_2 盒内以回旋半径 $R_2 = \frac{mv_2}{qB}$ 运动半个圆周又进入电场区,这样带电粒子一次次被加速,当速率达到预期值时,用特殊装置将其引出.

电子回旋加速器在加速带电粒子过程中,粒子速度太大时,相对论效应较明显, q/m 不再是常数,回旋周期将变大,就不能保证粒子在电场区总被加速,回旋加速器的基本原理就不适用,必须选择其它类型的加速器,如电子感应加速器.

电子回旋加速器可用于测定带电粒子的比荷.

由带电粒子的回旋半径公式 $R = \frac{mv}{qB}$ 可知,在设定好磁场的磁感强度 B 之后,通过速度选择器控制带电粒子速度 v 的大小,就可以通过测量粒子在磁场中的轨道半径的方法,测得粒子的比荷 q/B .

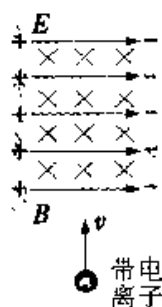


图 12.25
速度选择器

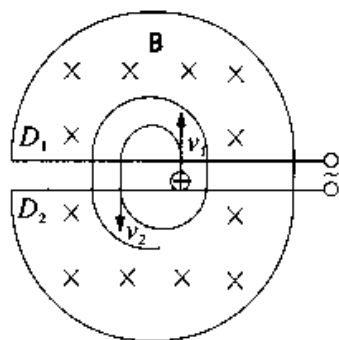


图 12.26 回旋加速器

3. 磁聚焦

当 \boldsymbol{v} 不垂直 \boldsymbol{B} 时, 带电粒子同时参与沿磁场方向的匀速直线运动和垂直磁场方向的匀速率圆周运动, 带电粒子将在磁场中作螺旋线运动.

粒子速度垂直于磁场方向的分量 v_{\perp} 所对应的洛伦兹分力将使粒子绕磁场作圆周运动, 回旋半径

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin\theta}{qB}$$

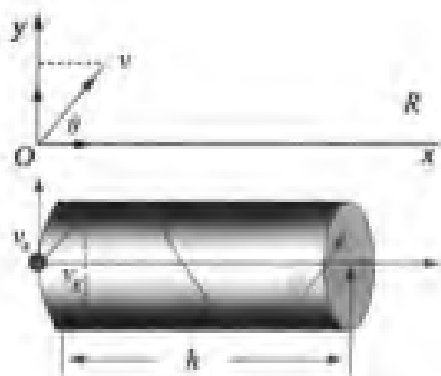


图 12.27 带电粒子在磁场中作螺旋运动

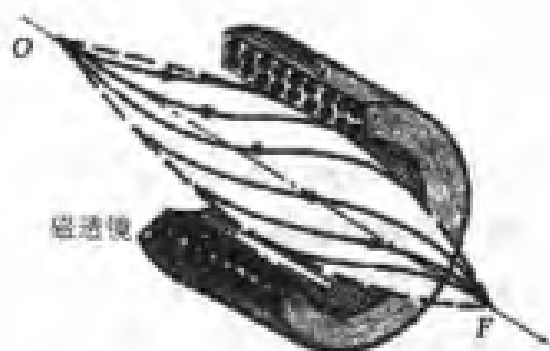


图 12.28 磁透镜

粒子速度平行于磁场方向的分量 v_{\parallel} 所对应的洛伦兹分力等于 0, 将使粒子作匀速直线运动. 两个分运动合成为螺旋线运动, 螺距为

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v \cos\theta}{qB} \quad (12-42)$$

带电粒子在螺旋线上每旋转一周, 沿磁场 \boldsymbol{B} 的方向前进一个螺距.

磁聚焦原理: 若从带电粒子源向磁场中发射出一束高速带电粒子流, 则它们具有相同的速度分量 v_{\parallel} 和不同的 v_{\perp} . 由于带电粒子沿螺旋线每旋转一周, 沿磁场 \boldsymbol{B} 方向前进的位移大小 (即螺距) 与 v_{\parallel} 成正比, 而与 v_{\perp} 无关. 尽管每个粒子的轨迹和半径不同, 但它们在距出发点为 $h, 2h, \dots$ 等处又会交汇于一点.

若从某点 A 射出一些速率大致相同, 方向稍有不同的运动电荷, 当它们在磁场 \boldsymbol{B} 的方向上具有大致相同的速度分量 v_{\parallel} 时, 由于 θ 很小, 有 $v_{\parallel} = v \cos\theta \approx v$, 螺旋线螺距为

$$h = \frac{2\pi m v}{qB} \approx \frac{2\pi m v}{qB} \quad (12-43)$$

经过一个周期运动后它们可会聚于同一点 A_1 . 这种现象与透镜能将光束聚焦现象

十分相似,故称之为磁聚焦.

磁聚焦现象一般都是利用载流螺线管中激发的磁场来实现的.在实际应用中,大多用载流的短线圈所激发的非均匀磁场来实现磁聚焦作用.由于这种线圈的作用与光学中的透镜作用相似,故称磁透镜(如图 12.29).

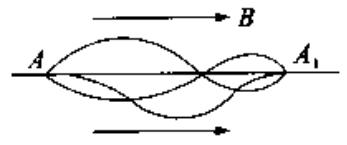


图 12.29 磁聚焦

在显像管、电子显微镜和真空器件中,常用磁透镜来聚焦电子束.

4. 霍尔效应

带电粒子 q 在电场 E 中受电场力 F_e 的作用 $F_e = qE$,由上节又知道,速度为 v 、电荷为 q 的带电粒子在磁场 B 中受磁场力 F_m 的作用 $F_m = qv \times B$.若在某一区域内同时有电场和磁场存在,则运动的带电粒子在此区域内所受到的作用力应是上述两者之矢量和,即

$$F = qE + qv \times B \quad (12-44)$$

因此,可以利用外加的电场和磁场,来控制带电粒子流的运动,这在近代科学技术中的应用是极为重要的.

将通有电流 I 的金属板(或半导体板)置于磁感强度为 B 的均匀磁场中,磁场的方向和电流方向垂直(如右图 12.30),在金属板的第三对表面间就显示出电势差 U_H ,该现象称为霍尔效应, U_H 则称为霍尔电势差.

实验测定,霍尔电势差的大小和电流 I 及磁感强度 B 成正比,而与板的厚度 d 成反比.进一步的理论分析表明,霍尔电势差可定量地表示为

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad (12-45)$$

其中, R_H 称为霍尔系数,其值为 $R_H = \frac{1}{nq}$.这里 n, q 分别为载流子数密度和载流子的电荷量.推导过程如下.

在金属导体中通有电流时,电子在均匀磁场 B 中受洛伦兹力的作用而发生偏转,在上下两侧表面分别聚积正、负电荷.随着电荷的积累,在上下表面间出现了霍尔电场 E_H .当电子受到的电场力 F_e 与洛伦兹力 F_m 达到平衡时,有

$$eE_H = evB \quad E_H = vB$$

因为霍尔电场 E_H 是均匀的,故上下表面的霍尔电势差为

$$U_H = E_H l = vBl$$

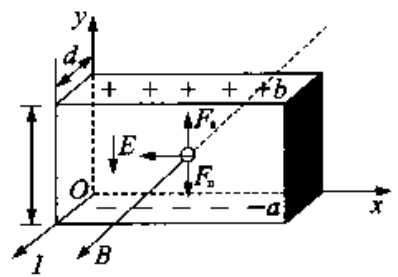


图 12.30 霍尔效应

若导体中载流子的密度是 n , 利用电流强度的公式可得电子的平均漂移速度为

$$I = qnvs = qnvld \quad v = \frac{I}{qnld}$$

将此式代入上式得霍尔电势差为

$$U_H = R_H \frac{IB}{d}$$

其中霍尔系数为 $R_H = \frac{1}{nq}$.

霍尔系数与材料性质有关. 在金属导体中, 自由电子的浓度大, 故金属导体的霍尔系数很小, 相应的霍尔电势差也就很弱, 即霍尔效应不明显. 在半导体中, 载流子浓度很低, 故半导体的霍尔系数比金属导体大得多, 即半导体能产生很强的霍尔效应.

表 12-2 一些物质的霍尔系数

物 质	化学名称	霍尔系数	物 质	化学名称	霍尔系数
锂	Li	-1.7	铋	Bi	2.44
钠	Na	-2.5	镁	Mg	-0.94
钾	K	-4.2	锌	Zn	0.33
铯	Cs	-7.8	铬	Cr	6.5
铜	Cu	-0.55	铝	Al	-0.30
银	Ag	-0.84	锡	Sn	-0.048
金	Au	-0.72	铊	Tl	0.12

利用霍尔效应制成的霍尔元件, 作为一种特殊的半导体器件, 在生产和科研中得到广泛的应用. 如判别材料的导电类型、确定载流子数密度与温度的关系、测量温度、测量磁场、测量电流. 磁流体发电的原理也是依赖于霍尔效应的.

磁流体发电是 20 世纪 50 年代末开始进行实验研究的一项新技术. 磁流体发电机的电动势是等离子体通过磁场时, 其中正、负带电粒子在磁场相互作用下而产生的. 在普通发电机中, 电动势由线圈在磁场中转动产生. 为此必须先把初级能源(化学燃料或核燃料)燃烧放出的热能经过锅炉、热机等变成机械能, 然后再变成电能. 在磁流体发电机中, 是利用热能加热等离子体, 然后使等离子体通过磁场产生电动势而直接得到电能, 不经过热能、机械能的转变, 从而可以提高热能利用的效率. 这是磁流体发电的特点, 也是人们对它感兴趣的主要原因.

磁流体发电机的主要结构如图 12.31 所示, 在燃烧室中利用燃料燃烧的热能加

热气体使之成为等离子体(为了加速等离子体的形成,往往在气体中加入一定量的容易电离的碱金属,如钾元素作“种子”),温度约为 3000K,然后使等离子体进入发电通道,发电通道的两侧有磁极以产生磁场,其上、下两面安有电极,等离子体通过通道时,两电极间就有电动势产生,离开通道的气体成为废气,这时气体温度仍然

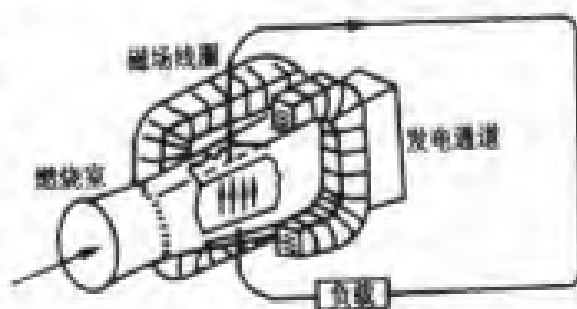


图 12.31 磁流体发电机结构示意图

很高,可达 2300K,这废气可以导入普通发电厂的锅炉,以便进一步加以利用,废气不再回收的磁流体发电机称为开环系统,在利用核能的磁流体发电机内,气体—等离子体是在闭合管道中循环流动反复使用的,这样的发电机称为闭环系统。

1959年,美国阿夫柯公司建造了第一台磁流体发电机,功率为 115kW,此后各国均有研究制造,美苏联合研制的磁流体发电机 U-25B 在 1978年 8月进行了第四次试验,气体—等离子体流量为 2—4kg/s,温度为 2950K,磁场为 5T,输出功率 1300kW,共运行了 50 小时,目前许多国家正在研制百万、千万瓦的利用超导磁体的磁流体发电机。

现在磁流体发电机制造中的主要问题是发电通道效率低,目前只有 10%,通道和电极的材料都要求耐高温、耐咸腐蚀、耐化学烧蚀等,目前所用材料的寿命都比较短,因而磁流体发电机不能长时间运行。

三、带电粒子在非均匀磁场中的运动

当电子在非均匀磁场中运动时,由公式 $F = qv \times B$ 可知,洛伦兹力方向如图 12.32 所示。

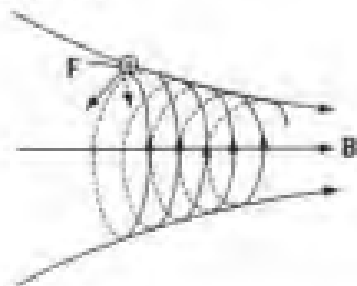


图 12.32 电子在非均匀磁场的运动

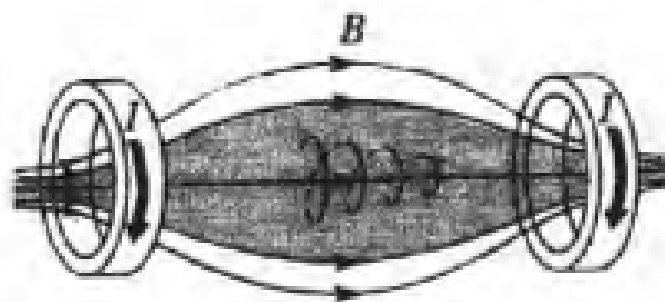


图 12.33 磁瓶

力 F 在垂直粒子运动方向上的分力 F_{\perp} 是使电子作圆周运动的向心力;另一个分力与电子运动的速度平行且反向,它使得电子向着强磁场方向的运动速度减慢,有可能直至停止,并继而沿反方向(磁场较弱的一方)加速前进。

带电粒子在非均匀磁场中运动时,会受到一个恒指向与磁场方向相反的洛伦兹分力的作用.利用这一现象可以实现磁约束.在图 12.33 中利用两个亥姆赫兹线圈就可以实现两边强中间弱的磁场分布,从而将带电粒子束缚于其中.地磁场就是一个天然的磁约束装置.利用一组线圈如图 12.34 环形排列,通电后就可形成等离子体磁约束装置,该装置又称托卡马克装置,是实现高温等离子体磁约束,进而实现可控核聚变的重要设备.

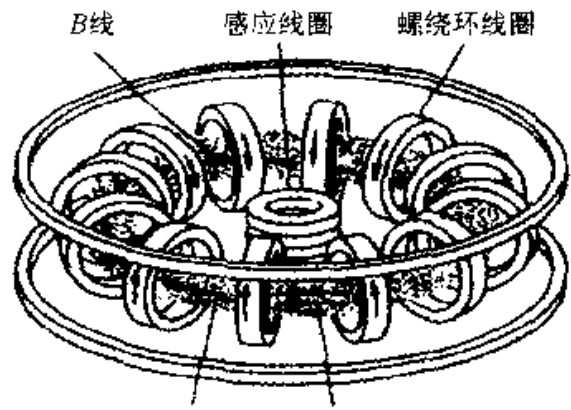


图 12.34 托卡马克装置

§ 12.7 磁场对载流导线的作用

一、载流导线在磁场中受的力

1. 安培力

电流是电荷定向运动的结果,载流导线处在磁场中,导线中每一运动电荷都要受到磁场施加的洛伦兹力.设导线中电荷定向迁移速度为 v ,电量为 q ,电荷数密度为 n ,导线的截面积为 S ,则运动电荷所受的洛伦兹力

$$f_m = qv \times B$$

如图 12.35 中,在导线上取一小段 dl , dl 长度中参与导电的运动电荷总数是 dN , $dN = nSdl$, dN 个电荷受力的总和(dl 很小,各电荷受力方向一致)

$$F = f_m dN = nSdlqv \times B$$

由于导线中电流强度 I 的表达式为 $I = qnVS$,将此式代入上式有

$$F = Idl \times B$$

此式表示载流回路中一段电流元在磁场中所受的力.

安培总结出了载流回路中一段电流元在磁场中受力的基本规律,称为安培定律.它表明:磁场对电流元 $I dl$ 的作用力,在数值上等于电流元的大小、电流元所在处的磁感强度 B 的大小、以及电流元与磁感强度两者方向间夹角 $\theta = (dl, B)$ 的正弦之乘积,其数学表达式为

$$dF = I dl B \sin\theta$$

电流元所受磁场力 dF 的方向服从右手螺旋法则.用矢量形式表示为

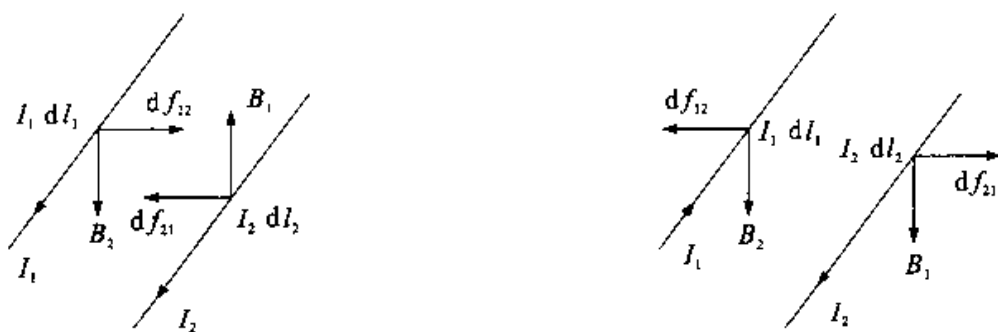
$$dF = I dl \times B \quad (12-46)$$

任何载流导线都是由连续的无限多个电流元所组成的,因此,根据安培定律,磁场对有限长度 l 的载流导线的作用力 F ,等于各电流元所受磁场力的矢量叠加,即

$$F = \int dF = \int I dl \times B \quad (12-47)$$

2. 平行载流导线间的相互作用力

在图 12.36 中设两导线间的垂直距离为 a , 电流为 I_1 和 I_2 , 导线 1 在导线 2 处的磁感强度为 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$, 方向与导线 2 垂直. 导线 2 上的一段 dl_2 受到的力的大小 $df_{21} = I_2 dl_2 B_1$, 反过来, 导线 2 产生的磁场对导线 1 上的一段 dl_1 受到的力的大小 $df_{12} = I_1 dl_1 B_2$.



(a) 通同向电流

(b) 通异向电流

图 12.36 平行通电直导线间的相互作用

根据安培定律,可以定量地计算出两条无限长载直导线之间每单位长度上相互作用的磁场力的大小为

$$f = \frac{df_{12}}{dl_1} = \frac{df_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (12-48)$$

可以验证当两导线通入同向电流时,其间相互作用力为吸引力,两电流反向时,则为排斥力.

在国际单位制中,电流强度是基本量之一,其单位安培就是按上式定义的,当公式中 $I_1 = I_2, a = 1\text{m}, f = 2 \times 10^{-7}\text{N/m}$ 时,则 $I = 1\text{A}$. 安培定义:“在真空中相距 1 米的两无限长平行细直导线通入电流大小相等,在每米长度上的作用力为 2×10^{-7} 牛顿”,此时的电流为 1A.

在一个平面内,一段形状不规则的载流导线,电流为 I ,若处在磁感强度为 B 的均匀磁场中,磁场的方向垂直于该平面.可证明:作用在此载流导线上的磁场力,等同于将载流导线首尾相连的一段直导线受到的磁场力.(此结果是否适用于非均匀磁场)

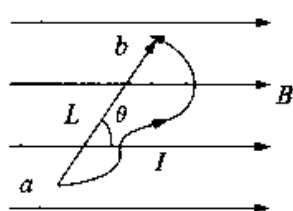


图 12.37

思考 如何利用安培定律求磁场中载流导线所受的磁场力?一段任意形状的载流导线处在一般的非均匀磁场中,受到的磁场力应如何计算?

例 12-3 如图,一铅直放置的长直导线,通有电流 $I_1 = 2.0\text{A}$;另一水平直导线长为 $l_2 = 40\text{cm}$,通有电流 $I_2 = 3.0\text{A}$,其始端与铅直载流导线相距 $l_1 = 40\text{cm}$,求水平直导线上所受的力.

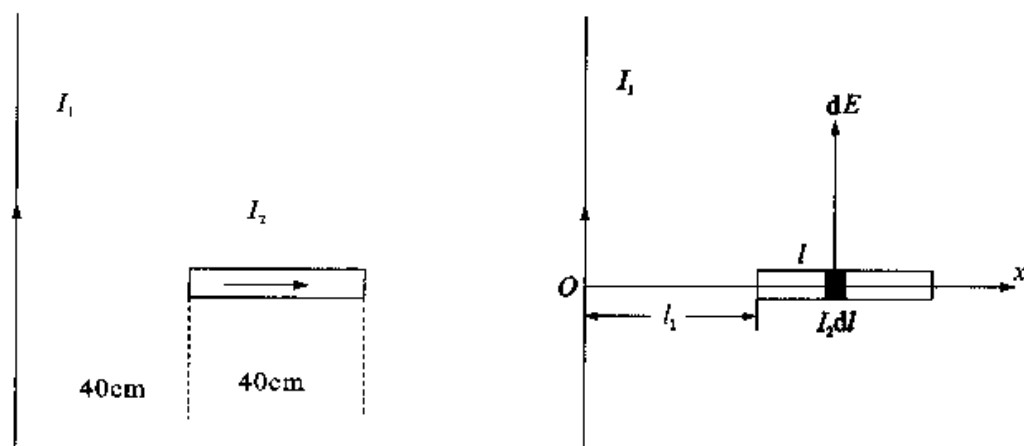


图 12.38

分析 长直载流导线 I_1 在空间产生的是非均匀磁场,其大小 $B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r}$,在导线右边的方向垂直向里,将水平直导线分割成许多电流元 $I_2 dl$,每个电流元到长直载流导线 I_1 的距离不同,受到的磁场力不同.在水平载流导线上 L 任取一段电流元

$I_2 dl$, 它与长直载流导线 I_1 的距离为 l , 在 $I_2 dl$ 的微小范围内, 磁感强度可视作相等, 这样, 电流元 $I_2 dl$ 所受磁场力 dF 的大小为 $dF = BI_2 dl \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi l} dl$

根据右手螺旋法则, 其方向沿平面铅直向上.

解 由于水平载流导线上任一电流元所受磁场力的方向都是相同的, 因此整个水平载流导线上所受的磁场力 F 的大小是许多同方向平行力之和, 可用积分法算出

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi l} dl \\ F &= \int_l dF = \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi l} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{dl}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \ln \frac{l_1 + l_2}{l_1} \end{aligned}$$

代入题设数据后, 得

$$F = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times 2 \times 3 \times \ln \frac{40 + 40}{40} = 8.32 \times 10^{-7} \text{ N} \quad (\text{方向如图所示})$$

二、均匀磁场对线圈的作用

以矩形平面载流线圈为例, 分析平面载流线圈在均匀磁场中的受力情况.

设边长分别为 l_1 和 l_2 的矩形平面载流线圈 $abcd$, 电流强度为 I , 置于磁感强度为 B 的均匀磁场中, 线圈的平面和磁场的方向成任意角 θ , 如图 12.39 所示. 作用在 ad, bc 两段导线上的安培力分别为

$$F_{ad} = BI l_2 \sin \theta \quad \text{方向竖直向上}$$

$$F_{bc} = BI l_2 \sin(\pi - \theta) \quad \text{方向竖直向下}$$

这两个力大小相等, 方向相反, 作用在一条直线上, 互相抵消, 不产生力矩.

作用在 ab, dc 两段导线上的安培力分别为(如图 12.40)

$$F_{ab} = F_{dc} = BI l_1$$

方向: ab 段的力垂直线圈平面向外, dc 段的力垂直线圈平面向里. 这两个力形成一对力偶. 力矩大小

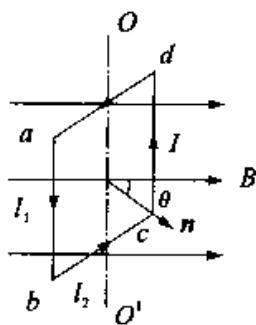


图 12.39 矩形线圈在磁场中受力

$$M = F_{ab} \frac{l_1}{2} \sin\theta + F_{cd} \frac{l_1}{2} \sin\theta$$

$$M = BIl_1 l_2 \sin\theta = BIS \sin\theta \quad (12-49)$$

其中 θ 为线圈正法线 n 方向与 B 方向的夹角, 线圈正法线 n 的方向规定与电流流向成右手螺旋关系.

定义匝数为 N 的多匝平面载流线圈的磁矩为

$$m = NISn_0 \quad (12-50)$$

在均匀磁场中, 可以更为一般地表示为

$$M = m \times B \quad (12-51)$$

上面根据安培定律分别计算了矩形载流线圈四条边受到的磁场力及线圈所受到的力矩, 所受磁场力之和为 $\sum_i F_i = 0$, 所受磁力矩为 $M = m \times B$.

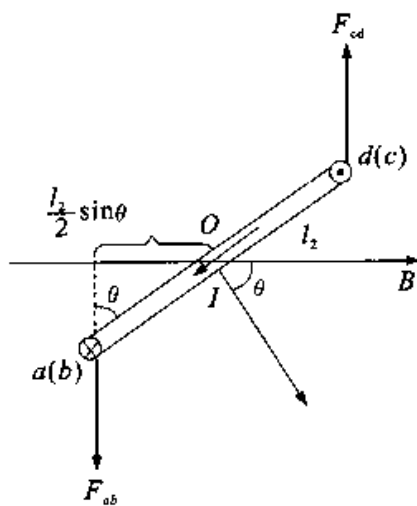


图 12.40 线圈在磁场中受力图

此结果是从特殊的矩形载流线圈导出, 但可推广到任意平面线圈, 有兴趣的读者可自己证明.

在均匀磁场中的平面载流线圈不会平动, 但可以转动. 因为载流线圈在磁场中所受的磁力矩 M 大小与 $\sin\theta$ 成正比, 故有下述几种特殊情形:

- (1) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 线圈所受到的磁力矩最大, $M_{\max} = mB$, 此时线圈处于最不稳定状态.
- (2) 当 $\theta = 0$ 时, 磁力矩最小, $M = 0$, 此时线圈处于稳定平衡状态.
- (3) 当 $\theta = \pi$ 时, 磁力矩也是最小, $M = 0$, 此时线圈处于非稳定平衡状态.

三、磁电式电流计的工作原理

磁电式电流计的内部结构: 由永久磁铁和放于永久磁铁两极间的可动线圈构成, 可动线圈通过发条式弹簧与指针相连.

磁电式电流计的工作原理: 线圈中通有电流时, 线圈在磁场中受磁力矩作用会发生偏转, 当磁力矩 M 和游丝的弹性恢复力矩相平衡时, 指针停留在一定的位置上指示出线圈中电流的大小.

当匝数为 N 的线圈中通入电流时, 由于线圈处在一个各处磁感应强度都相同的磁场中, 线圈平面的法线始终和 B 垂直, 线圈所受力矩: $M = NBIS$, 线圈因受力

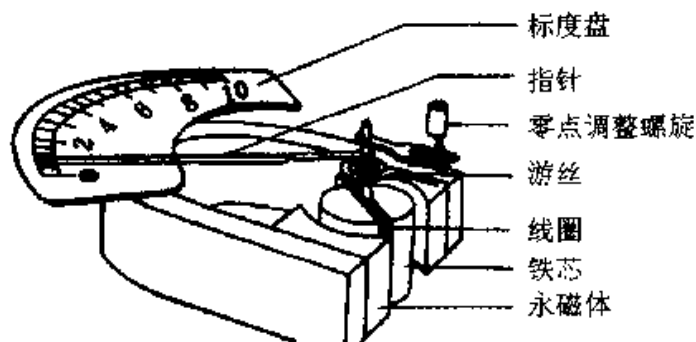


图 12.41 磁电式电流计结构示意图

矩作用而发生偏转, 设偏转 θ 角度, 同时装在线圈上的游丝被扭转而产生反向扭力距 $k\theta$, 当磁力矩 M 和游丝的扭力距平衡时, $M = NBIS = k\theta$, 所以

$$I = \frac{k\theta}{NSB} = K\theta \quad (K = \frac{k}{NSB}, K \text{ 为游丝的扭转常数}) \quad (12-52)$$

即通过线圈的电流 I 与线圈的偏转角 θ 成正比. 式中 k 为常量, 其值可由实验测定, 这样利用上式就可以从线圈偏转的角度 θ 测出通过线圈的电流, 这就是磁电式电流计的工作原理.

例 12-4 半圆形线圈的半径 $R = 10\text{cm}$, 通有电流 $I = 10\text{A}$, 放在磁感强度 $B = 5.0 \times 10^{-2}\text{T}$ 的均匀磁场中, 磁场方向为水平、且与线圈平面平行. 试问: 该线圈不是矩形线圈, 所受的合力为零吗? 所受的磁力矩如何计算?

解 由安培定律可知, 该线圈直线部分受到的磁力大小为

$$F_1 = 2RIB$$

方向为垂直屏面向里. 下面对该线圈圆弧部分受到的磁力大小进行计算.

在圆弧上任取一电流元 Idl (如图 12.42), 它与磁场方向的夹角为 θ , 该电流元受到的安培力为 $d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}$, 其大小为 $dF = IB \sin\theta dl$, 方向垂直向外, 且圆弧上任一

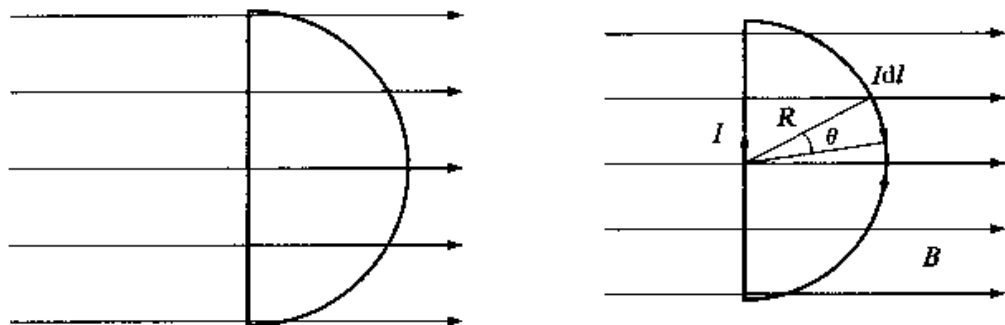


图 12.42

电流元受的安培力方向都相同. 由图中可知整个圆弧受到的安培力的大小为 $F_2 = \int dF = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} IB \sin\theta dl = 2RIB$, 方向垂直向里. 所以, 线圈受到的合力为 $F = F_1 + F_2$. 但是, F_1 和 F_2 的方向相反, 且不作用在同一条直线上, 即线圈受到的磁力矩不为零.

取线圈的面法线方向垂直屏面向里, 该线圈的磁矩的大小为 $m = IS = \frac{I\pi R^2}{2}$. 线圈受到的磁力矩大小为 $M = mB = 7.9 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$, 由右手螺旋法可知, 磁力矩的方向向下.

§ 12.8 磁介质中的磁场

介质由于其电本性, 在电场中会出现极化现象, 在介质中要出现极化电荷. 有电介质时的电场是外电场与极化电荷激发的附加电场相叠加, 它改变原电场的空间分布. 与此相仿, 由于任何物质中的分子或原子中都存在运动的电荷, 所以当把物质放到磁场中时, 分子或原子中的运动电荷将受到磁场力的作用, 使物质处于一特殊状态, 处于这一特殊状态的物质又反过来影响原磁场的空间分布. 我们把在磁场作用下发生变化, 并反过来影响原磁场的空间分布的物质, 称为磁介质.

一、磁介质分类

磁介质的情况比电介质复杂. 若没有介质时稳恒电流产生的磁感强度为 B_0 , 而当磁场中充满各向同性的均匀无限大介质后, 磁感强度为 B , 实验表明

$$B = \mu_r B_0 \quad (12-53)$$

公式中 μ_r 为磁介质的相对磁导率.

人们根据 B_0 和 B 的大小关系, 把磁介质分为三大类. 有些介质的 $\mu_r > 1$, 即 $B > B_0$. 说明介质的存在使磁场加强了, 这类介质称为顺磁介质, 简称顺磁质. 例如, 锰、铬、铝、氮、氧等物质. 另有些介质的 $\mu_r < 1$, 即 $B < B_0$, 说明介质的存在使磁场减弱了, 这类介质称为抗磁介质, 简称抗磁质. 例如, 金、银、汞、铜、铅、氨、氢等物质. 不管是顺磁介质, 还是抗磁介质, 它们的相对磁导率 μ_r 都十分接近于 1, $|\mu_r - 1|$ 的数量级一般为 $10^{-1} \sim 10^{-5}$, 这两类磁介质对原磁场的影响都极其微弱, 统称为弱磁质. 还有一类物质, 其 $\mu_r \gg 1$, $B \gg B_0$, 数量级可达 $10^2 \sim 10^4$, 且不是常数, 这类介质称为铁磁介质, 简称铁磁质. 例如铁、钴、镍及其合金等.

二、磁化机理

磁介质在外磁场 B_0 的作用下,产生附加磁场 B' ,使空间的磁场 B 发生改变的现象,称之为介质的磁化.不同的介质磁化机理不同,本节主要介绍弱磁质的磁化机理.

1. 顺磁质的磁化

在原子内,核外电子绕核作轨道运动,同时作自旋运动,原子核本身也作自旋运动.这些运动的电荷都可形成微小的圆电流.每一圆电流产生的磁场都可用它的磁偶极矩来说明.一个分子通常有多个电子、多个原子核,一个分子的磁偶极矩是其中所有电子的轨道磁矩(如图 12.43)、自旋磁矩以及各原子核的自旋磁矩的矢量和,称之为分子的固有磁偶极矩.

实验表明,在没有外磁场时,顺磁质在宏观上并不表现出磁性,因为热运动使分子磁矩 m 的空间取向变得杂乱而无规则.在介质中任一一个体积元内,所有分子磁矩矢量和均为零,因而,整块顺磁质不显现磁性.

但当顺磁质放在外磁场 B_0 中时,介质中的每个分子磁矩 m 都等效于一个圆电流,称为分子电流(如图 12.44),这些分子电流如同小载流线圈一样,将在外磁场的磁力矩 $M = m \times B$ 的作用下转动,每个分子磁矩 m 的方向在一定程度上都将转向外磁场的方向上去,从而形成沿外磁场 B_0 方向较有规则的排列.相应地,每个分子电流激发的磁场也或多或少地沿着外磁场的方向.对处于外磁场中的整块顺磁质而言,在宏观上就呈现沿外磁场 B_0 方向的磁化,形成与外磁场 B_0 同方向的附加磁场 B' .故顺磁质内部的磁场为 $B = B_0 + B'$,磁场被增强了.这就是顺磁质的磁化机理.

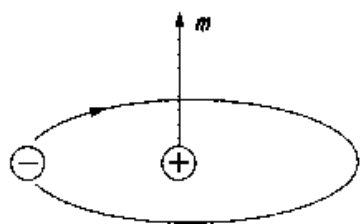


图 12.43 电子轨道磁矩

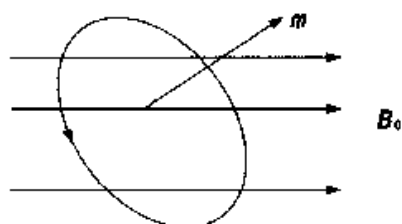


图 12.44 分子电流在磁场中的取向

2. 抗磁质的磁化

在抗磁性物质中,分子中各个电子的“轨道磁矩”和自旋磁矩完全抵消,其矢量和为零,即每个分子的固有磁矩均为零, $m = 0$.因此在没有外磁场时,整块抗磁质不

显现磁性.

尽管抗磁质的分子固有磁矩等于零,但分子的自旋磁矩和“轨道磁矩”并不为零.在外磁场作用下电子的轨道运动、自旋运动以及原子核的自转运动都会发生变化,因而都会在原有磁矩 m_0 的基础上产生一附加磁矩 Δm ,以图 12.45 中的电子的轨道运动为例加以说明.

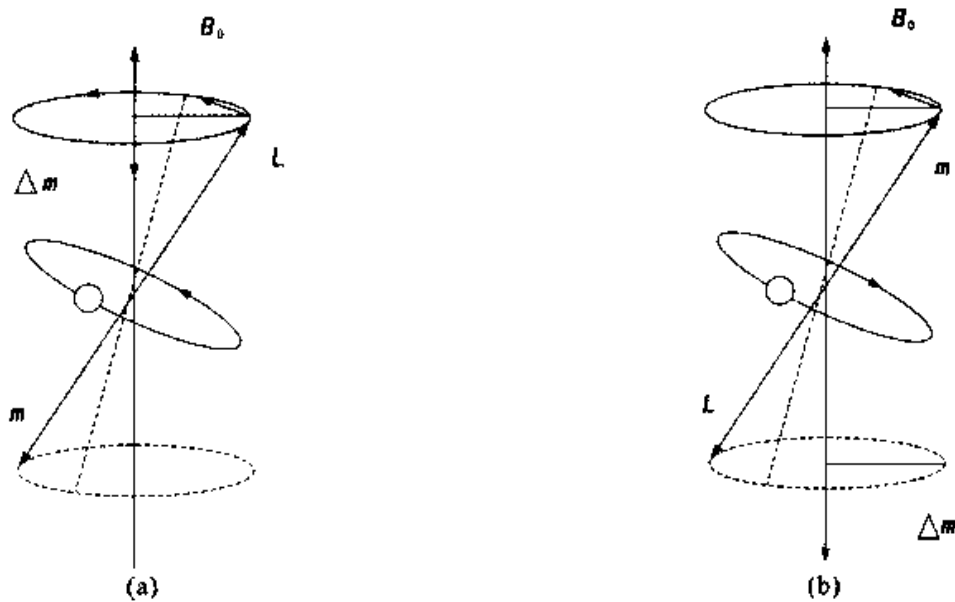


图 12.45 在外场中电子的进动

在图 12.45(a) 中电子绕核逆时针运动,设电子质量为 m ,轨道半径为 r ,电子轨道磁矩 m 如图示,大小为 $m = IS = \frac{evr}{2}$,电子作轨道运动时,轨道角动量 L 方向如图示,大小为 $L = m_e vr$,因此电子轨道磁矩 m 可表示为

$$m = \frac{e}{2m_e} L \quad (12-54)$$

电子轨道磁矩在磁场中受到的力矩为

$$M = m \times B_0 = -\frac{e}{2m_e} L \times B_0 \quad (12-55)$$

由于力矩 M 与角动量 L 垂直,它不改变 L 的大小,只改变 L 的方向,如图 12.45 所示,力矩 M 使角动量 L 和电子磁矩绕外磁场 B_0 方向进动,进动方向为逆时针方向,这样电子在原来轨道运动的基础上又附加了一个进动,电子的进动也等效一个圆电流.该圆电流就产生一附加磁矩 Δm , Δm 方向向下,和 B_0 方向相反.在图 12.45(b) 中电子顺时针运动,可以证明,附加磁矩 Δm 也和 B_0 方向相反.因此,电子

的进动的圆电流产生一附加磁矩 Δm , Δm 方向总和外磁场 B_0 方向相反, 附加磁矩 Δm 就形成与外磁场 B_0 反方向的附加磁场 B' . 故抗磁质内部的磁场 B 的大小 $B < B_0$, 有 $B = B_0 - B'$, 磁场被削弱了. 这就是抗磁质的磁化机理.

总之, 对弱磁质处在外磁场 B_0 中, 有

$$B = B_0 + B' \quad (12-56)$$

顺磁质磁化后产生附加磁场 B' 和 B_0 同向, 抗磁质磁化后产生附加磁场 B' 和 B_0 反向.

应注意不管是顺磁质, 还是抗磁质, 在外磁场中分子都首先表现出普遍的抗磁性. 但顺磁质在外磁场中的磁化, 主要是由分子磁矩的取向作用所产生的, 顺磁质在磁场中的抗磁性比顺磁性要小得多, 一般情况下, 可以忽略不计.

三、磁化强度矢量

为了从宏观上描述磁介质的磁化方向和磁化强弱的程度, 引入磁化强度 M 这一物理量. 设 m_i 为某分子的固有磁矩, 在磁介质内取体积元 ΔV , 该体积元内总磁矩为 $\sum m_i$, 则磁化强度定义为单位体积内介质的所有分子磁矩的矢量和,

$$M = \frac{\sum m_i}{\Delta V} \quad (12-57)$$

实验证明, 不论是顺磁质还是抗磁质的磁化强度 M 都随外磁场的增强而增大, 各向同性磁介质的磁化强度 M 和外磁场 B 成正比, 可用公式表示为

$$M = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} B \quad (12-58)$$

其中 μ_r 为磁介质的相对磁导率, μ_0 为真空磁导率.

不论是顺磁质还是抗磁质, 磁化后都会在磁介质的表面产生一层等效的电流 I' , 称为磁化电流. 从宏观上看, 磁介质中的附加磁场 B' 就是由这一层磁化电流 I' 产生的.

以顺磁质为例, 在图 12.46(a) 中, 设想无限长直螺线管内部均匀充满各向同性的顺磁质, 当介质被均匀磁化后, 各分子磁矩沿外磁场方向排列, 分子电流与分子磁矩的方向成右手螺旋关系. 在介质内部, 相邻分子电流的方向彼此相反, 相互抵消; 在介质的表面一薄层内, 分子电流靠近介质内部的部分被抵消, 只有在介质截面边缘各点上分子电流的效应未被抵消, 它们在宏观上形成了与截面边缘重合的一种看似由一段段分子电流连续接成的等效大圆形电流, 这一等效电流就称为磁化电流,

又称束缚电流[如图 12.46(b)].

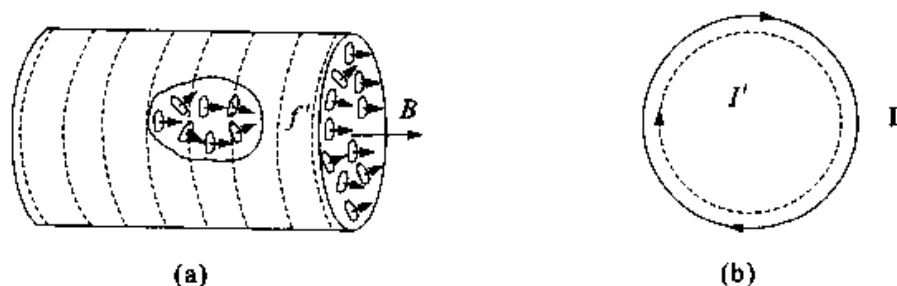


图 12.46 顺磁介质磁化使分子电流的分布

将束缚电流 I' 和束缚电荷 q' 相类比, 可得到束缚(磁化)电流 I' 公式, 任意闭合路径 L 包含的总束缚(磁化)电流 I' 等于磁化强度沿该闭合路径的环流.

$$I' = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (12-59)$$

四、有磁介质条件的安培环路定理

处于外磁场 \mathbf{B}_0 中的磁介质在磁场的作用下, 产生磁化电流, 该磁化电流又激发附加磁场 \mathbf{B}' , 影响原磁场的分布, 附加磁场 \mathbf{B}' 的大小又受外磁场 \mathbf{B}_0 大小的影响, 它们之间的相互影响的关系比较复杂, 但空间中任一点的磁感强度等于外磁场 \mathbf{B}_0 和附加磁场 \mathbf{B}' 的矢量和, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$.

对包含载流导体和磁介质的系统, 根据安培环路定理有: 磁感强度沿任意闭合路径 L 的环流等于该回路内各种电流(导体中电流——自由电流、磁介质中的磁化电流)代数之和的 μ_0 倍, 即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum (I + I') \quad (12-60)$$

将公式(12-59)代入公式(12-60)有

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (12-61)$$

类似电介质中高斯定理引入辅助量 \mathbf{D} , 在磁介质环路定中也引入辅助量——磁场强度 \mathbf{H} , 令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (12-62)$$

上式简化为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (12-63)$$

此式说明,沿任意闭合路径 L 磁场强度的环流等于该回路所包含的自由电流的代数和.这就是有磁介质条件的环路定理.

引入辅助量磁场强度 \mathbf{H} ,如同在电介质中高斯定理引入辅助量 \mathbf{D} 一样,使求解磁介质中磁场变得更为简洁.

将式(12-58)代入式(12-62)得

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

令 $\mu = \mu_0 \mu_r$, μ 为介质的磁导率,则

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (12-64)$$

五、铁磁质

铁、钴、镍和它们的一些合金、稀土族金属(在低温下)以及一些氧化物有明显而特殊的磁性.首先是它们的相对磁导率 μ_r 都比较大,而且随磁场的强弱发生变化;其次是它们都有明显的磁滞效应.下面简单介绍铁磁质的特性.

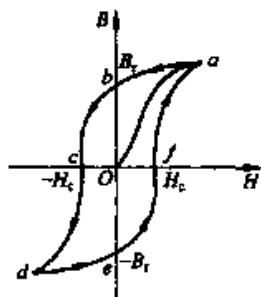
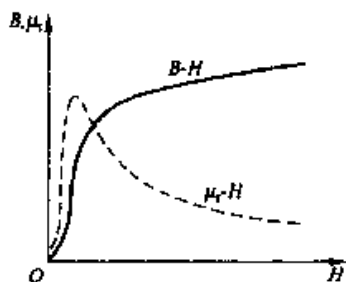
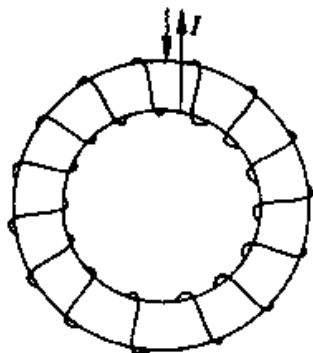


图 12.47 环装铁心被磁化 图 12.48 铁磁质中 B 和 μ_r 随 H 变化曲线 图 12.49 磁滞回线

用实验研究铁磁质的性质时通常把铁磁质试样做成环状,外面绕上若干匝线圈(图 12.47).线圈通入电流后,铁磁质就被磁化.当这励磁电流为 I 时,环中的磁场强度 H 的大小为

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (12-65)$$

式中 N 为环上线圈的总匝数, r 为环的平均半径.这时环内的 B 可以用另外的方法测出,于是可得一组对应的 H 和 B 的值,改变电流 I ,可以依次测得许多组 H 和 B 的值,这样就可以绘出一条关于试样的 $H-B$ 关系曲线以表示试样的磁化特点.这样

的曲线叫磁化曲线。

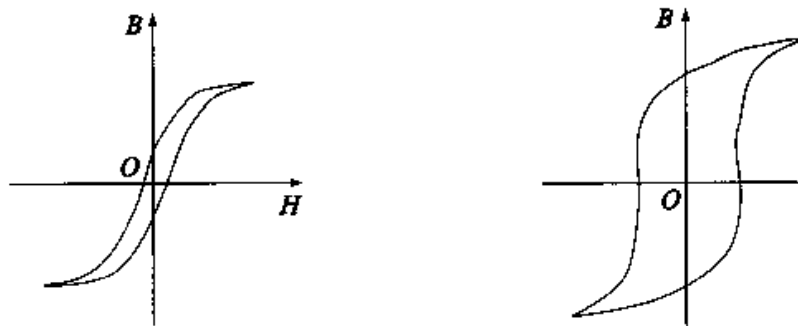
如果从试样完全没有磁化开始,逐渐增大电流 I ,从而逐渐增大 H ,那么所得的磁化曲线叫起始磁化曲线,一般如图 12.48 所示. H 较小时, B 随 H 成正比增大. H 再稍大时 B 就开始急剧地但也约成正比地增大,接着增大变慢,当 H 到达某一值后再增大时, B 就几乎不再随 H 增大而增大了. 这时铁磁质试样达到了一种磁饱和状态,这时所有的原子磁矩都沿 B 的方向排列整齐了.

根据 $\mu_r = B/\mu_0 H$,可以求出不同 H 值时的 μ_r 值, μ_r 随 H 变化是非线性的,如图 12.48. 实验证明,各种铁磁质的起始磁化曲线都是“不可逆”的,即当铁磁质达到磁饱和后,如果慢慢减小磁化电流以减小 H 的值,铁磁质中的 B 并不沿起始磁化曲线逆向逐渐减小,而是减小得比原来增加时慢. 如图 12.49 中 ab 线段所示,当 $I = 0$,因而 $H = 0$,但 B 并不等于 0,而是还保持一定的值. 这种现象叫磁滞效应. H 恢复到零时铁磁质内仍保留的磁化状态叫剩磁,相应的磁感应强度常用 B_r 表示.

要想把剩磁完全消除,必须改变电流的方向,并逐渐增大这反向的电流(图 12.49 中 bc 段). 当 H 增大到 $-H_c$ 时, $B = 0$. 这个使铁磁质中的 B 完全消失的 H_c 值叫铁磁质的矫顽力.

再增大反向电流以增加 H ,可以使铁磁质达到反向的磁饱和状态(cd 段). 将反向电流逐渐减小到零,铁磁质会达到 $-B_r$ 所代表的反向剩磁状态(de 段). 把电流改回原来的方向并逐渐增大,铁磁质又会经过 H_c 表示的状态而回到原来的饱和状态(efa 段). 这样,磁化曲线就形成了一个闭合曲线,这一闭合曲线叫磁滞回线. 由磁滞回线可以看出,处于磁化状态的铁磁质中的磁感强度 B 不能由励磁电流或 H 值单值地确定,它还取决于该铁磁质此前的磁化历史.

不同的铁磁质的磁滞回线的形状不同,表示它们各具有不同的剩磁 B_r 和矫顽



(a) 软磁材料的磁滞回线

(b) 硬磁材料的磁滞回线

图 12.50 铁磁质的磁滞回线

力 H_c 。纯铁、硅钢、坡莫合金(含铁、镍)等材料的 H_c 很小,因而磁滞回线比较瘦[图 12.50(a)],这些材料叫软磁材料,常用作变压器和电磁铁的铁心。碳钢、钨钢、铝镍钴合金(含 Fe、Al、Ni、Co、Cu)等材料具有较大的矫顽力 H_c ,因而磁滞回线显得胖[图 12.50(b)],它们一旦磁化后对外加的较弱磁场有较大的抵抗力,或者说它们对于其磁化状态有一定的“记忆能力”,这种材料叫硬磁材料,常用来作永久磁体、记录磁带或电子计算机的记忆元件。

实验指出,当温度高到一定程度时,铁磁材料的上述特性将消失而成为顺磁质。这一温度叫居里点。几种铁磁质的居里点如下:铁为 1040K,钴为 1390K,镍为 630K。

铁磁质磁性的起源可以用“磁畴”理论来解释。在铁磁体内部存在着无数个线度约为 $10^{-1}m$ 的小区域,这些小区域叫磁畴。在每个磁畴中,所有原子的磁矩全都向着同一个方向排列整齐了。在未磁化的铁磁质中,各磁畴的磁矩的取向是无规则的,因而整块铁磁质在宏观上没有明显的磁性。当在铁磁质内加上外磁场并逐渐增大时,其磁矩方向和外加磁场方向相近的磁畴逐渐扩大,而方向相反的磁畴逐渐缩小。最后当外加磁场大到一定程度后,所有磁畴的磁矩方向也都指向同一个方向了,这时铁磁质就达到了磁饱和状态。

实验指出,把铁磁质放到周期性变化的磁场中被反复磁化时,它要变热。变压器或其它交流电磁装置中的铁芯在工作时由于这种反复磁化发热而引起的能量损失叫磁滞损耗或“铁损”。单位体积的铁磁质反复磁化一次所发的热和这种材料的磁滞回线所围的面积成正比。因此在交流电磁装置中,利用软磁材料如硅钢作铁芯是适宜的。

思考题

12-1 一带电粒子进入均匀磁场,粒子沿何方向进入受到的力最大,沿何方向进入受到的力为零?

12-2 一带电粒子进入某一区域并发生偏转,能否判断该区域存在电场、还是磁场?

12-3 为何宇宙射线(基本上是质子流)进入地球磁场,在两极比其它地方更容易接近地球?

12-4 能否用磁场来加速带电粒子?

12-5 磁场是否是保守场?

12-6 如果 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 能否说明回路 L 不包含电流, 或回路上各点磁感应强度等于零?

12-7 比较电流元激发的磁场和电荷激发的电场有何不同?

12-8 分析两相互垂直放置的电流元间的相互作用力, 它们是否符合牛顿第三定律?

12-9 磁感强度 \mathbf{B} 和磁场强度 \mathbf{H} 有何区别和联系?

12-10 比较静电场和稳恒磁场的高斯定理、环路定理, 说明静电场和稳恒磁场间的区别.

习 题

12-1 求如图 12.51 中各圆心处的磁感应强度.

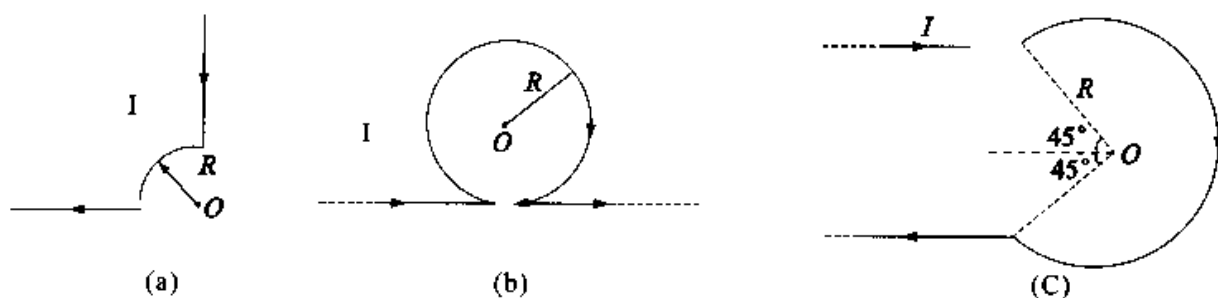


图 12.51

12-2 将无限长导线弯成如图 12.52 形状, 导线中通入电流 I , 半圆周的半径为 R , 求圆心处 O 的磁感应强度.

12-3 半径为 R 的无限长半圆柱面, 电流 I 在柱面上均匀分布, 求轴线上一点的磁感应强度.

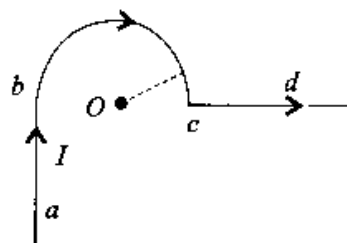


图 12.52

12-4 如图 12.53 有一边长为 a 正方形回路, 回路电流为 I , 求回路中心处的磁感应强度.

12-5 如图 12.54 所示, 半径为 R 的圆盘均匀带电, 电荷总量为 q , 圆盘绕过圆盘中心垂直盘面的转轴以角速度 ω 旋转, 求磁矩.

12-6 证明: 一电源以如图 12.55 方式与一铁环连接时, 环心处磁感应强度为

零。(设电源离环心较远)

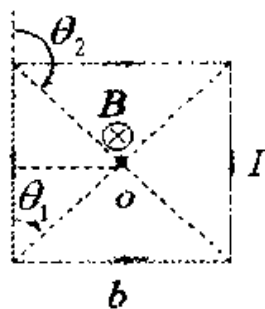


图 12.53

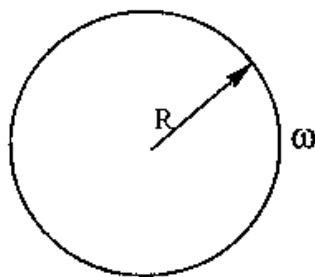


图 12.54

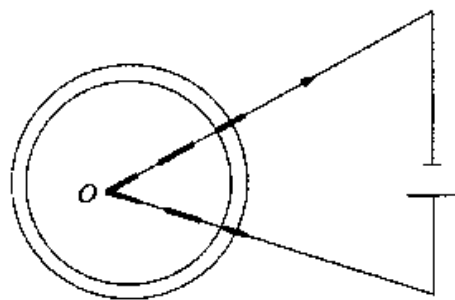


图 12.55

12-7 如图 12.56 所示,半径为 R 的绝缘球上密集的绕上细导线,线圈平面彼此平行,且单层覆盖整个半球,线圈总匝数为 N ,线圈电流为 I ,求球心处的磁感应强度.

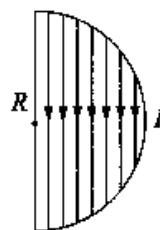


图 12.56

12-8 半径为 R 的圆盘均匀带电,电荷总量为 q ,圆盘绕过圆盘中心垂直盘面的转轴以角速度 ω 旋转,求圆心处的磁感应强度.(如图习题 12.5 用图)

12-9 如图 12.57,在通有电流为 I 的两相互平行的无限长直导线的平面内如图放置一边长为 a 的正方形回路,求穿过回路的磁通量.

12-10 如图 12.58,一通有电流为 I_1 的无限长直导线和一通有电流为 I_2 的直角三角形回路共面,求回路各边所受的力及穿过回路的磁通量.

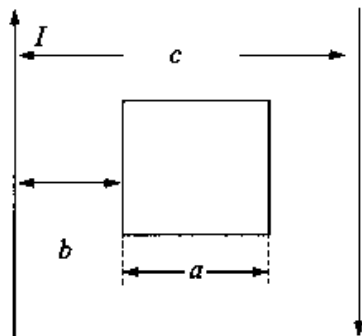


图 12.57

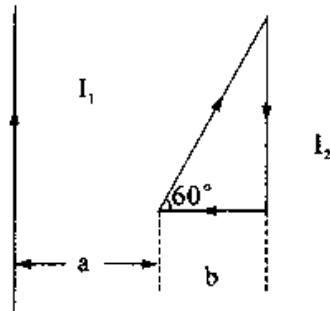


图 12.58

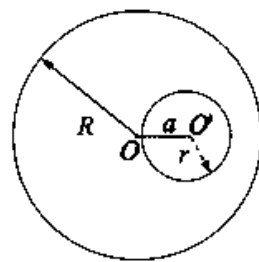


图 12.59

12-11 如图 12.59 所示,在一半径为 R 无限长圆柱体内,沿平行轴线方向距轴线距离为 a 处挖去一半径为 r 的无限长圆柱体,在导体中通入 I 的电流,求大圆柱体外磁场大小分布、大圆柱体轴线上的磁感应强度大小.

12-12 在无限长直导线的平面内如图 12.60 放置一边长为 a 的正方形回路,导线、回路中的电流为 I ,求穿过回路各边受力大小.

12-13 在利用质谱仪测定核质比实验中,如一初速很小的带电粒子,经一场强为 E 的匀强电场加速,加速 L 后垂直进入场强为 B 的匀强磁场,测得其回转半径为 R ,求粒子的核质比.

12-14 一质量为 m 、电量为 q 的带电粒子,以速度 v 进入磁感应强度为 B 的匀强磁场,设在磁场中某点的速度方向与磁场方向成 α 角度,当粒子运动一周时,求粒子沿磁场方向运动的距离.

12-15 电子在 $B = 20 \times 10^{-4} \text{T}$ 的均匀磁场中沿半径为 $R = 2.0 \text{cm}$ 的螺旋线运动,螺距 $h = 5.0 \text{cm}$. 求:

- (1) 电子运动速度的大小;
- (2) 磁场 B 的方向.

12-16 一银质条带, $z_1 = 2 \text{cm}$, $y_1 = 1 \text{mm}$. 银条中通有电流 200A , 电流方向沿正 X 轴,这根银条处于沿 Y 方向的均匀磁场中,如图 12.61 所示,磁感应强度的大小为 1.5T . 如果银条每立方米中有 7.4×10^{28} 个自由电子. 求:

- (1) 沿 X 轴方向的电子漂移速度;
- (2) 由于霍尔效应,在 Z 方向上产生的电势的大小和方向;
- (3) 霍尔电势差.

12-17 如图 12.62 所示,一半径为 R 的圆形线圈,通入电流 I ,放在均匀磁场 B 中,磁场方向与线圈平面平行,线圈可绕直径转动,求线圈所受的对转轴的力矩.

12-18 如图 12.63,一矩形线圈边长分别为 10cm 和 5cm ,线圈中通有电流 $I = 2 \text{A}$,此线圈可绕它的一边 OO' 转动,当加上 $B = 0.5 \text{T}$,方向与线圈平面成 30° 角的均匀磁场时,线圈的角加速度为 $\beta = 2 \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$,求:

- (1) 线圈的磁矩 m ;
- (2) 线圈对 OO' 轴的转动惯量 J .

12-19 将一无限大均匀载流平面放入均匀磁场中,板两边的磁场分别为 B_1

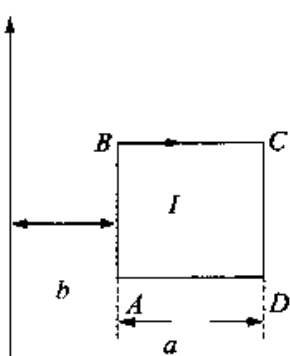


图 12.60

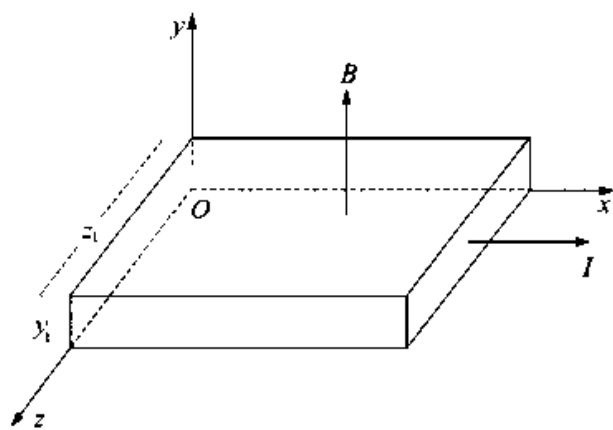


图 12.61

和 B_2 , 方向如图 12.64 所示, 求该平面上单位面积上的磁场力.

12-20 无限长直导线通入电流 I_1 , 半径为 R 的圆环通入电流 I_2 , 直导线和圆环共面如图 12.65 放置, 圆心到直线距离为 l , 求圆环受到的作用力.

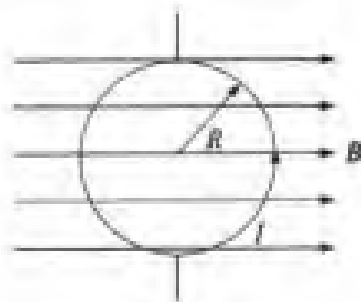


图 12.62

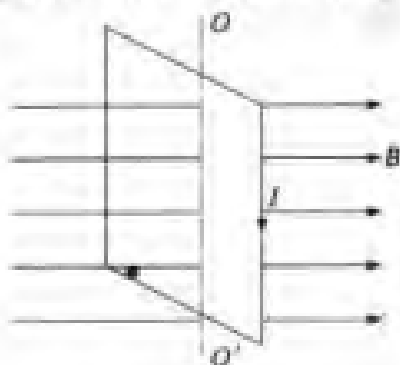


图 12.63

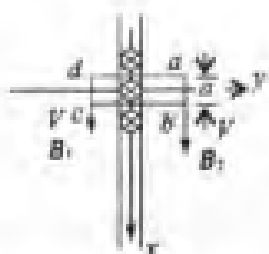


图 12.64

12-21 电磁炮原理图如图 12.66, 设圆柱体形导轨的半径为 R , 导轨的间距为 D , 导轨间放一宽度为 D 金属物作炮弹, 炮弹可在导轨间自由滑动, 导轨中的电流为 I , 试推导炮弹所受的作用力.

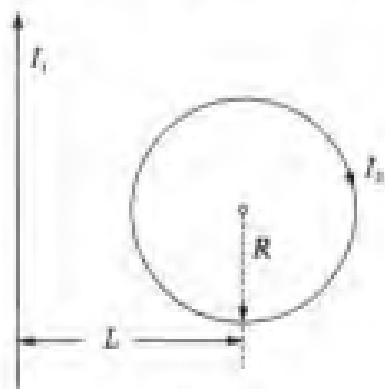


图 12.65

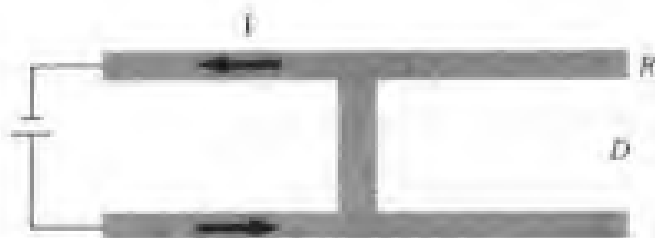


图 12.66

12-22 如图 12.67 是一无限长同轴电缆的横截面, 到体内外半径为 r_1 和 r_2 , 内导体的相对磁导率为 μ_1 , 电缆中的绝缘材料的相对磁导率为 μ_2 , 导体外为空气, 电流 I 由外导体流入, 内导体流出, 求磁感强度和磁场强度分布.

12-23 将磁导率 $\mu = 50 \times 10^{-4} \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 的铁磁质做成一个细圆环, 环上密绕线圈, 单位长度匝数 $n = 500$, 形成有铁芯的螺绕环, 当线圈中电流 $I = 8 \text{ A}$ 时, 计算:

- (1) 环内 B, H 的大小;
- (2) 束缚面电流产生的附加磁感强度.

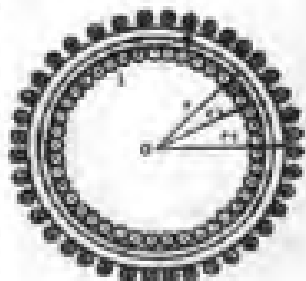


图 12.67

第 13 章 电磁感应

电磁感应现象的发现在科学和技术史上具有划时代的意义,它深刻揭示了电与磁之间的相互联系和转化.电磁感应现象的发现不仅促进了电磁理论的发展,为麦克斯韦电磁场理论的建立奠定了坚实的基础,而且在电工、电子技术、电气化、自动化方面的广泛应用对推动社会生产力和科学技术的发展发挥了重要的作用,为人类获得巨大而又廉价的电能和进入无线电通讯的信息时代开辟了道路.

本章的主要内容是,在对电磁感应现象分析的基础上介绍法拉第电磁感应定律,根据产生感应电动势原因的不同分别研究动生电动势和感生电动势,通过对线圈中的感应现象的讨论,介绍自感和互感及其应用,最后推导磁场能量的表达式.

§ 13.1 电磁感应定律

1820 年丹麦物理学家奥斯特发现了电流的磁效应,人们自然联想到:既然电流能够激发磁场,磁场是否也能产生电流呢?经过近十年持之以恒的精心实验研究,英国物理学家法拉第于 1831 年终于发现,当穿过闭合导体回路中的磁通量发生变化时,回路中就出现电流,这个现象称为电磁感应现象.



法拉第, Faraday

法拉第(Michael Faraday, 1791 年—1867 年),英国物理学家、化学家,也是著名的自学成才的科学家.1791 年 9 月 2 日出生于萨里郡纽因顿一个贫苦铁匠家庭.因家庭贫困仅上过几年小学,13 岁时便在一家书店里当学徒.书店的工作使他有时间读到许多科学书籍.在送报、装订等工作之余,自学化学和电学,并动手做简单的实验,验证书上的内容.利用业余时间参加市哲学学会的学习活动,听自然哲学讲演,因而受到了自然科学的基础教育.法拉第主要从事电学、磁学、磁光学、电化学方面的研究,并在这些领域取得了一系列重大发现.1820 年奥斯特发现电流的磁效应之后,法拉第于 1821 年提出“由磁产生电”的大

胆设想,并开始了艰苦的探索.1821年9月他发现通电的导线能绕磁铁旋转以及磁体绕载流导体的运动,第一次实现了电磁运动向机械运动的转换,从而建立了电动机的实验室模型.接着经过无数次实验的失败,终于在1831年发现了电磁感应定律.这一划时代的伟大发现,使人类掌握了电磁运动相互转变以及机械能和电能相互转变的方法,成为现代发电机、电动机、变压器技术的基础.法拉第对科学坚韧不拔的探索精神,为人类文明进步纯朴无私的献身精神,连同他的杰出的科学贡献,永远为后人敬仰.

一、电磁感应现象

首先让我们回顾以下发现电磁感应现象的典型实验,并由此归纳出产生电磁感应现象的基本条件.

(1) 如图 13.1 所示,线圈和电流计连成一个闭合导体回路,当磁棒插入或拔出线圈时,电流计指针都将发生偏转,但两种情况下电流计指针偏转的方向相反;改变磁棒插入或拔出的速度,指针偏转的幅度也不同.用一通有电流的线圈代替上述磁棒时,结果相同.

(2) 如图 13.2 所示,闭合导体回路同 1,另一导体回路由线圈、电源和电键构成,

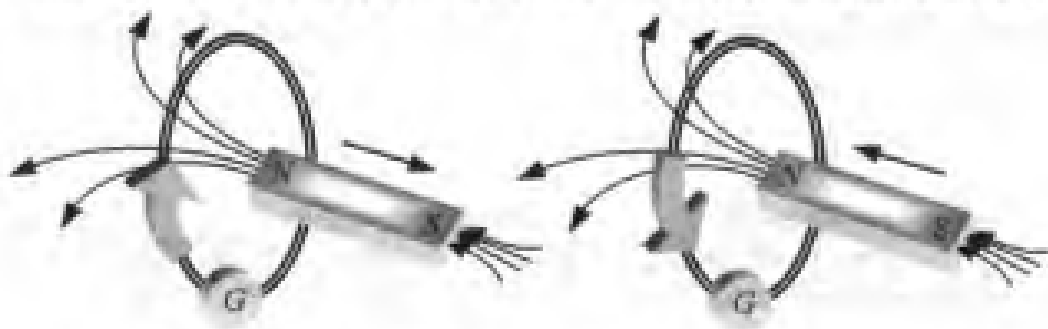


图 13.1 磁棒与线圈有相对运动时,电流计指针发生偏转

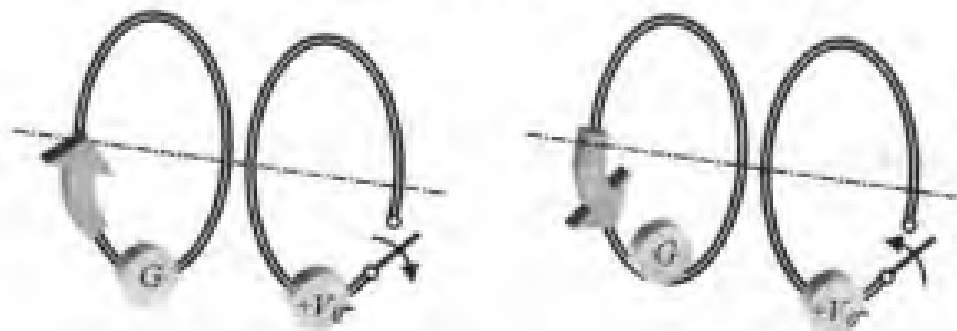


图 13.2 电键开关瞬间,电流计指针发生偏转

在电键闭合和打开瞬间,电流计指针将发生偏转,但两种情况下电流的流向相反.

以上实验表明:不管什么原因使穿过闭合导体回路所包围面积内的磁通量发生变化(增加或减少),回路中都会出现电流,这种电流称为感应电流.在磁通量增加和减少的两种情况下,回路中感应电流的流向相反.感应电流的大小则取决于穿过回路中的磁通量变化的快慢.变化越快,感应电流越大;反之,就越小.感应电流的流向可以用楞次定律来方便地判断.

二、楞次定律

关于感应电流的流向问题,俄国物理学家楞次在法拉第的实验资料基础上通过实验总结出如下规律:闭合回路中感应电流的方向总是使得它所产生的磁通量阻碍引起感应电流的磁通量变化.这就是楞次定律.

这里,所谓阻碍闭合回路磁通量的变化是指:当磁通量增加时,感应电流的磁通量方向与原来磁通量的方向相反(阻碍它的增加);当磁通量减小时,感应电流的磁通量与原来磁通量的方向相同(阻碍它的减小).例如在图 13.3 中,当磁棒插入线圈时,穿过线圈的磁通量增加,按照楞次定律,感应电流激发的磁通量应与原磁通量反向[图 13.3(a) 中虚线],再根据右手螺旋法则,可判断出感应电流的方向如图导线中的箭头所示;反之,当磁棒拔出时,穿过线圈的磁通减小,感应电流的方向如图 13.3(b) 所示.

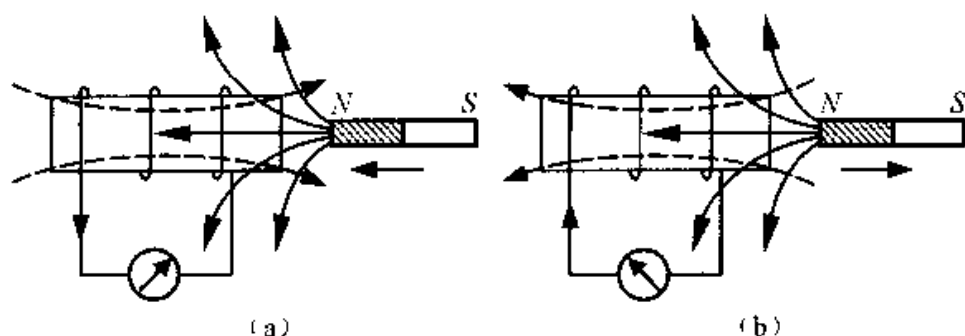


图 13.3 感应电流方向的确定(一)

大量实验现象证明,楞次定律实质上是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体体现.为理解这一点,我们从功和能的角度重新分析图 13.3 的实验.当磁棒插入时,按照楞次定律,出现感应电流的线圈可看作另一磁棒,其右端相当于 N 极,正好与向左插入的磁棒 N 极相斥.为使磁棒匀速向左插入,则必须借用外力克服这一斥力做功.另一方面,感应电流流过线圈及电流计时必然要发热,这个热量正是外力的功转

化而成的.可见,楞次定律符合能量守恒和转化这一普遍规律.设想如果感应电流的方向与楞次定律的结论相反,图 13.3a 线圈右端相当于 S 极,它与向左插入的磁棒左端的 N 极相吸,磁棒在这个吸力作用下将加速向左运动(无需其它向左的外力),线圈的感应电流越来越大,线圈与磁棒的吸力也越来越强.如此循环,在没有任何外力做功的情况下,磁棒的动能不断增加,而感应电流放出越来越多的热能,这显然违反了能量守恒定律.可见,能量守恒定律要求感应电流的方向服从楞次定律.

再举一个例子说明楞次定律与能量守恒定律的一致性.图 13.4 中 $abcd$ 是一个闭合回路(简称线框),“ \times ”表示外加恒定匀强磁场的方向垂直纸面向里.线框的磁通量等于磁感强度与线框所围面积的乘积.当可动边 ab 在外力作用下向右平移时,线框面积增加,因此磁通量增加.由楞次定律可知感应电流的方向为逆时针方向,如图

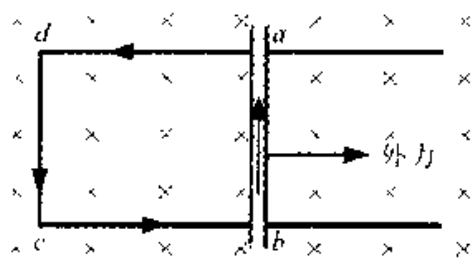


图 13.4 感应电流方向的确定(二)

中箭头所示.从功和能的角度来看,载有感应电流的导体段 ab 在磁场中要受到向左的磁场力(安培力)的作用,为使 ab 边向右匀速平移,就要用外力克服这个阻力做功,从而功转化为感应电流放出的热量.如果感应电流的方向与楞次定律的结论相反, ab 边所受安培力不是阻力而是动力,这显然也导致违反了能量守恒定律的结论.

以上两例存在一些共同点:都存在导体在磁场中的运动(图 13.3 可认为磁棒不动而线圈向左或向右运动);运动导体由于感应电流而受到的磁场力都阻碍导体的运动.这是能量守恒的必然结果.

三、法拉第电磁感应定律

从上述电磁感应现象中看到,当闭合导体回路所包围面积的磁通量变化时,此回路中就会出现感应电流,这意味着该回路中必定存在某种电动势.这种直接由磁通量变化所引起的电动势叫做感应电动势.也就是说,在任何电磁感应现象中,只要穿过回路的磁通量变化,回路中就一定有感应电动势产生.若导体回路是闭合的,感应电动势就会在回路中产生感应电流;若导线回路不是闭合的,回路中仍然有感应电动势,但是不会形成电流.

将法拉第的实验研究结果归纳起来,就得到了法拉第电磁感应定律,可表述为:不论任何原因,当穿过闭合导体回路所包围面积的磁通量 Φ 发生变化时,在回路中

都会产生感应电动势 ϵ , 而且感应电动势的大小总是与磁通量随时间 t 的变化率 $d\Phi/dt$ 成正比. 用公式来表示就是

$$\epsilon = k \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

式中, k 是比例系数, 它的值取决于各量所用的单位. 在国际单位制中, ϵ 的单位是伏特, Φ 的单位是韦伯, t 的单位是秒, 则有 $k = 1$. 如果再考虑到电动势的“方向”, 就得到法拉第电磁感应定律的完整表示形式, 即

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (13-1a)$$

应当指出, 式(13-1a) 是针对单匝回路而言的, 如果导体回路是由 N 匝线圈绕制而成, 则当磁通量发生变化时, 每匝线圈中都将产生感应电动势, 若每匝线圈穿过的磁通量分别是 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, 由于匝与匝之间是串联的, 所以整个线圈回路的总电动势就等于各匝线圈电动势之和, 即

$$\begin{aligned} \epsilon &= - \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \dots - \frac{d\Phi_N}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} (\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) \\ &= - \frac{d\Psi}{dt} \end{aligned} \quad (13-1b)$$

式中 $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N$ 称为磁通链.

若回路的电阻为 R , 则回路中感应电流的大小为

$$I = \frac{\epsilon}{R} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt} \quad (13-2)$$

在 $t_1 - t_2$ 这段时间内, 通过回路任一截面的感应电量为

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} I dt = - \frac{1}{R} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi \\ &= \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2) \end{aligned} \quad (13-3)$$

式(13-2) 表明, 感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关, 变化率越大, 感应电流越强; 式(13-3) 则表明, 穿过回路中任一截面的感应电量却只与磁通量的变化量有关. 因此, 若测得感应电量, 就可计算出磁通量的变化量. 常用的测量磁感应强度的磁通计(又成为高斯计) 就是根据这一原理制成的.

现在来讨论电磁感应定律中负号的意义. 在判定感应电动势的方向时, 首先需

规定导体回路的绕行方向:回路 L 的绕行方向和回路包围面积的正法线方向 e_n 的关系服从右手螺旋定则,如图 13.5 所示.规定回路绕行方向的目的是以便确定感应电动势的正负,规定回路所围面积的法线方向的目的是为了确定磁通量的正负.这样,当穿过回路的磁感强度方向与面法线 e_n 的方向所成夹角 θ 小于 90° 时,磁通量 Φ 为正; θ 大于 90° 时,磁通量 Φ 为负.

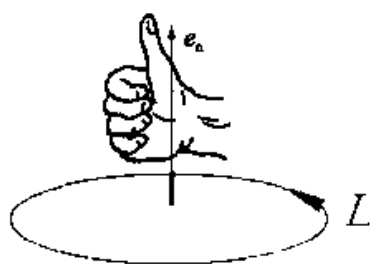


图 13.5 回路正法线方向 e_n 的确定

考虑到在一个回路中的感应电动势只可能有两种取向,这样由电磁感应定律确定的 ϵ 的正负就有了明确的含义:当 $\epsilon > 0$ 时,表示感应电动势的方向和回路的绕行方向相同;当 $\epsilon < 0$ 时,表示感应电动势的方向和回路的绕行方向相反.讨论图 13.3a 磁棒插入线圈时,由式(13-1)可知 $\epsilon < 0$.此时,线圈中感应电流所激发的磁场与原磁感强度的方向相反,它阻碍磁棒向线圈运动.对于图 13.3b 磁棒拔出线圈时,由式(13-1)可知 $\epsilon > 0$.此时,线圈中感应电流所激发的磁场与原磁感强度的方向相同,它阻碍磁棒远离线圈运动.这与应用楞次定律判断感应电动势方向时所表述的物理意义是一致的.

§ 13.2 电源 电动势

一般来说,如果要在导体内形成恒定的电流,必须要在其中维持不随时间变化的电场,也就是在导体两端维持恒定的电势差.产生和维持这个电势差的装置称为电源.如图 13.6 所示,当回路接通后,正电荷在电场力的作用下从电势高处 A(电源正极)经外电路移至电势低处 B(电源负极),并与负电荷中和.

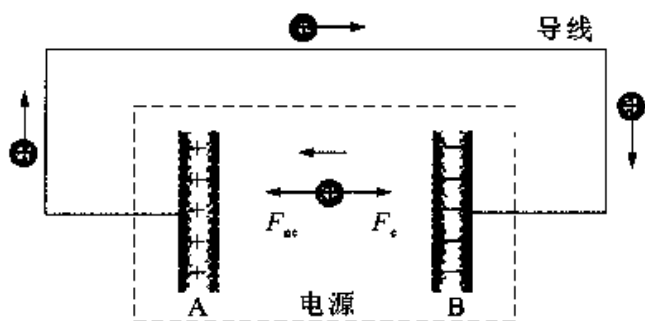


图 13.6 电源内非静电力的作用

因此,两极的电荷不断减少,两极间的电势差也逐渐减小直至消失.电源的作用就在于把正电荷从电势低处 B 通过电源内部移送到电势高处 A,以维持两极间恒定的电势差.如果电源内仅有静电力 F_e ,是不能实现这一过程的,必须有非静电力 F_{nc} 作用才行.电源恰能提供所需的非静电力.

电源的种类很多,常见的有干电池、蓄电池、光电池、发电机等.不同种类的电源,其非静电力的性质不同.例如,化学电池中的非静电力是化学力;发电机中的非静电力是电磁作用力.

从能量观点看,电源内部非静电力在移动电荷的过程中克服静电力做功,使电荷的电势能增加,从而将非电能量(化学能、热能、机械能等)转换成电能.

在不同的电源内,把一定量的电荷从负极移到正极,非静电力所作的功是不同的.为了定量地描述电源转化能量的本领,引入电动势的概念.在电源内,把单位正电荷从负极移到正极的过程中,非静电力所作的功叫做电源的电动势.以 ϵ 表示电源电动势, A_{ne} 为电源内把电量为 q 的正电荷从负极移到正极非静电力所作的功,则有

$$\epsilon = \frac{A_{ne}}{q} \quad (13-4)$$

借用场的概念,可以把非静电力的作用看作是非静电场的作用,用 E_{ne} 表示非静电场的强度,则它对电荷 q 的作用为 $F_{ne} = qE_{ne}$.在电源内,非静电力将正电荷 q 由负极移到正极所作的功为

$$A_{ne} = \int_{(-)}^{(+)} qE_{ne} \cdot dr$$

将上式代入式(13-4),可得

$$\epsilon = \int_{(-)}^{(+)} E_{ne} \cdot dr \quad (13-5)$$

上式是用场的观点表示的电动势.

电动势是标量,但为了便于判断在电流流通时非静电力做功的正负(也就是电源是放电,还是被充电),通常把电源内部电势升高的方向,即电源内负极到正极的指向规定为电动势的方向.

电源电动势的大小仅取决于电源本身的性质,而与所连接的外电路无关.

§ 13.3 动生电动势和感生电动势

根据法拉第电磁感应定律:只要穿过回路的磁通量发生了变化,在回路中就会有感应电动势产生.根据磁通量的定义式 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 不难看出,引起磁通量变化的原因不外乎两条:

(1) 场的分布不随时间变化,但回路相对于磁场有运动.即构成磁通量的回路面

积取向和面积大小在变化,而磁感强度保持不变.在这种情况下,由磁通量变化而产生的感应电动势,称为动生电动势.

(2) 回路在磁场中虽无相对运动,回路的位置、形状和大小不变,但是磁场在空间的分布是随时间变化的,即构成磁通量的回路面积取向和面积大小不变,磁感强度在变化.因为这一原因产生的感应电动势称为感生电动势.

一、动生电动势

如图 13.7 所示,导体回路 $abcd$ 置于匀强磁场中磁感强度 B 垂直于回路平面,回路中 ab 部分可以自由滑动.当 ab 以速度 v 向右平行滑动时,回路所包围的面积不断扩大,通过回路面积的磁通量也将不断增加,此时回路中将产生动生电动势.设在 dt 时间内 ab 向右移动的距离为 dx ,则回路所围面积增加的磁通量为 $d\Phi = BdS = Bl dx$,则动生电动势的大小为

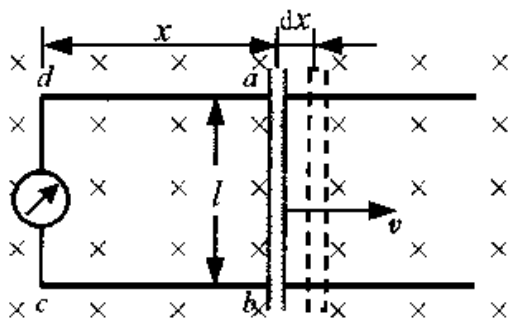


图 13.7 导体在匀强磁场中平动

$$\epsilon = \frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (13-6)$$

由楞次定律可以判定,导线 ab 上的电动势是从 b 端指向 a 端, a 端电势高于 b 端.由此可见,在磁场中运动的导线 ab 就是一个最简单的电源, a 端为电源的正极, b 端为电源的负极,导线 ab 的电阻就是电源的内阻.

我们知道,电荷在磁场中运动时要受到洛伦兹力的作用,而引起动生电动势的非静电力就是洛伦兹力.当导线 ab 在磁场中以速度 v 向右平移时,导线内每个自由电子都要受到洛伦兹力 f 的作用(如图 13.8 所示),

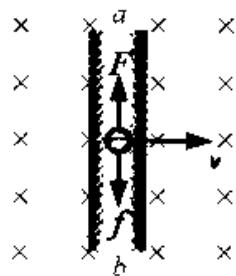


图 13.8 动生电动势

$$f = (-e) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

上式中, $(-e)$ 为电子的电量, f 的方向由 a 指向 b .在洛伦兹力的作用下,电子沿导线由 a 运动到 b ,在 b 端聚积,使 b 端带负电, a 端由于出现过剩的正电荷而带正电,从而在导线内建立起静电场.当作用于电子上的静电场力 F 与洛伦兹力 f 大小相等时,导线 ab 两端形成稳定的电势差.此时,导线 ab 中非静电场的场强为

$$E_{nc} = \frac{f}{(-e)} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

根据电动势的定义可得,在磁场中运动的导线 ab 所产生的动生电动势为

$$\epsilon = \int_b^a \mathbf{E}_{nc} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (13-7)$$

在图 13.8 中,由于 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 都为恒矢量且相互垂直,而 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向相同,所以上式积分的

$$\epsilon = \int_0^l Bv dl = Blv$$

而导线 ab 上动生电动势的方向为由 b 指向 a ,这些均与式(13-6)的结果是一致的.

动生电动势可用以下两种方法计算.

(1) 采用式(13-7)计算,一般来说,积分路径上各点的 v 及 B 都可能不相同,不一定能提到积分符号外.

(2) 采用法拉第电磁感应定律计算.

这时有两种可能:

① 闭合回路整体或局部在稳恒磁场中运动.根据运动情况求出闭合回路的磁通量与时间的关系,求磁通量随时间的变化率便可求得动生电动势.

② 一段不闭合导线在稳恒磁场中运动.不闭合导线不存在磁通量的概念,但可假想一条曲线与该导线构成回路,其动生电动势可由法拉第电磁感应定律求得.

例 13-1 如图 13.9 所示,长为 L 的金属棒在匀强磁场中,以角速度 ω 在与磁场方向垂直的平面内绕棒的一端 O 匀速转动.求棒中的动生电动势.

解一 在金属棒上距 O 点为 l 处取一线元 $d\mathbf{l}$,其运动速度的大小为 $v = \omega l$.因 $\mathbf{v}, \mathbf{B}, d\mathbf{l}$ 相互垂直,所以 $d\mathbf{l}$ 两端的动生电动势为

$$d\epsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = Bv dl$$

因为棒上所有线元的电动势方向相同,则金属棒 L 两端总的动生电动势的大小为

$$\epsilon = \int_l d\epsilon = \int_0^L Bv dl = \int_0^L B\omega l dl = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

动生电动势的方向为 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的指向,即由 A 指向 O , A 端带负电, O 端带正电.

解二 设 t 时刻棒在 OA 处,如图 13.10 所示,作辅助直线 OA' 和弧线 $A'A$,构

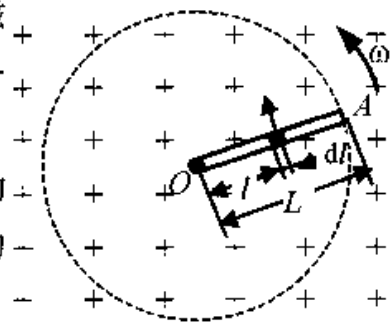


图 13.9

成回路 OAA' . 磁场穿过 OAA' 扇形面积 S 的磁通量为

$$\Phi = BS = \frac{1}{2}BL^2\theta$$

式中 Φ 和 θ 都是时间 t 的函数. 根据法拉第电磁感应定律, 可求得棒两端动生电动势为

$$\epsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}BL^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

根据楞次定律可知, 电动势的方向从 A 指向 O , 即 A 端为负极, O 端为正极.

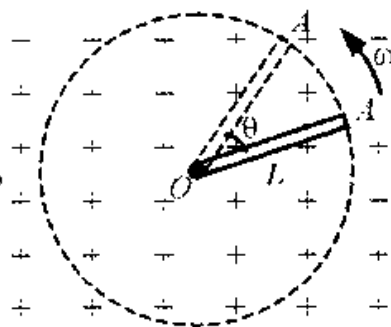


图 13.10

二、感生电动势和感生电场

将一导体回路置于一磁场中, 如果回路固定不动, 而磁场随时间变化, 则通过导体回路面积的磁通量也将发生变化. 根据法拉第电磁感应定律, 在导体回路中将产生感生电动势形成感应电流. 由于导体回路未动, 这说明感应电动势的产生只是变化的磁场本身引起的. 这时在回路形成的感应电流是哪一种非静电场力作用的结果呢? 麦克斯韦从场的观点出发, 创造性的突破了电场只能由电荷激发的认识, 假设是由于磁场变化而产生了一种电场, 是这个电场使导体中的自由电子定向移动而形成电流. 麦克斯韦还认为: 即使没有导体, 这种电场同样存在. 这种由变化磁场产生的电场称为感生电场, 以 E_i 表示.

单位正电荷沿闭合回路移动一周时, 感生电场所作的功等于回路内产生的感生电动势, 即

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (13-8)$$

此式表明, 感生电场的场强沿任一闭合回路的线积分不等于零, 即感生电场不是保守场, 而是有旋场.

根据磁通量与磁感强度的关系, 式(13-8)也可写为

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (13-9)$$

式中 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 是闭合回路所围面积内某点的磁感强度随时间的变化率, 此式表明, 只要存在着变化的磁场, 就一定会有感生电场.

与静电场相同, 感生电场对置于其中的电荷也有力的作用. 感生电场与静电场

的不同之处,一是产生的原因不同,静电场是由静止电荷产生的,而感生电场则是由变化的磁场激发;二是性质不同,静电场是保守场,而且有源,它的电场线始于正电荷终于负电荷,而感生电场是有旋场,而且无源,它的电场线是闭合曲线,无头无尾.

例 13-2 如图 13.11 所示,半径为 R ,高为 h 的铜圆盘,其电导率为 σ .把圆盘放在磁感强度为 B 的均匀磁场中,磁场方向垂直盘面.设磁场随时间的变化满足 $dB/dt = k$ 为一常量.求盘内的感应电流值.(圆盘内感应电流自己的磁场忽略不计)

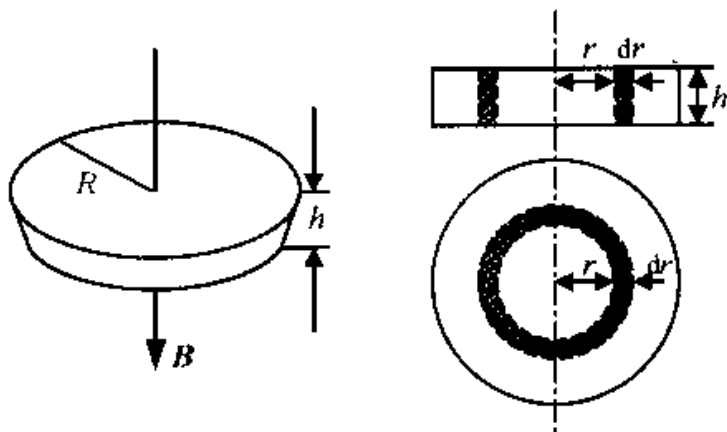


图 13.11

解 在圆盘中取一半径为 r 、宽为 dr 、高为 h 的圆环.由于磁场随时间变化,根据式(13-9),在圆环中的感生电动势的值为

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

考虑到磁场方向垂直于盘面,则有

$$\epsilon = \frac{dB}{dt} \int_S dS = \frac{dB}{dt} \pi r^2 = k\pi r^2$$

由电阻的定义可知

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi r}{h dr}$$

又由欧姆定律可得圆环中的感应电流为

$$dI = \frac{kh\sigma}{2} r dr$$

则圆盘中的感应电流值为

$$I = \int dI = \frac{kh\sigma}{2} \int_0^R r dr = \frac{1}{4} kh\sigma R^2$$

三、涡电流

感生电场力可以在整块金属内部引起闭合涡旋状的感应电流,这种电流成为涡电流.由于多数金属的电阻率很小,因此不大的感应电动势往往会在整块金属内部激起强大的涡电流.

图 13.12 表示一个铁芯线圈通过交变电流时在铁心内部激起的涡电流,它是由变化磁场激发的感生电场引起的.

涡电流与普通电流一样要放出焦耳热.利用涡电流的热效应进行加热的方法叫做感应加热.冶炼金属用的高频感应炉就是感应加热的一个重要例子,如图 13.13 所示,当线圈通入高频交变电流时,坩埚中的被冶炼金属内部出现强大的涡电流,它所产生的热量可使金属很快熔化.采用高频的目的是考虑到涡电流所产生的热量与交变电流频率的二次方成正比.这种冶炼方法的最大优点之一就是冶炼所需的热量直接来自被冶炼金属本身,因此可达极高的温度并有快速和高效的特点.此外,这种冶炼方法易于控制温度,并能避免有害杂质混入被炼金属中,因此适于冶炼特种合金和特种钢等.

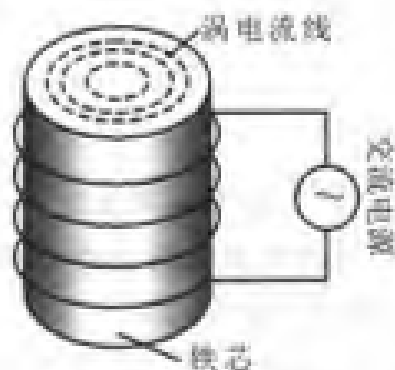


图 13.12 铁芯中的涡电流



图 13.13 高频感应炉

涡电流的热效应对于变压器和电机的运行极为不利.首先,它会导致铁心温度升高,从而危及线圈绝缘材料的寿命,严重时甚至可使绝缘材料当即烧毁.其次,涡电流发热要损耗额外的能量(叫做涡流损耗),使变压器和电机的效率降低.为了减小涡电流,变压器和电机的铁心都不用整块钢铁而用薄的硅钢片迭压而成.硅钢是掺有少量硅的钢,其电阻率比普通钢大,因此涡电流损耗得以减少.把硅钢制成片状则是为了借用片间的绝缘漆(或自然形成的绝缘氧化层),切断涡电流的通路以进一步减小涡电流的发热.

除涡电流的热效应外,涡电流还具有磁效应.如图 13.14 所示,在电磁铁未通电时,由铜板 A 做成的摆要往复多次才能停止下来.如果电磁铁通电,磁场在摆动的铜板 A 中产生涡电流.涡电流受磁场作用力的方向与摆动方向相反,因而增大了摆的阻尼,摆很快就能停止下来.这种现象称为电磁阻尼.

电磁仪表中的电磁阻尼器就是根据涡电流磁效应制作的,它可使仪表指针很快地稳定在应指示的位置上.此外,电气机车的电磁制动器也是根据这一效应制作的.

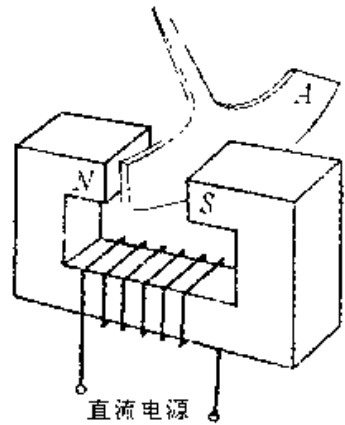


图 13.14 电磁阻尼

§ 13.4 自感和互感

根据法拉第电磁感应定律,只要使穿过闭合回路的磁通量发生变化,闭合回路中就会产生感应电动势.由于引起磁通量变化的原因很多,所以必须根据具体情况具体分析.

一、自感

电流流过线圈,其磁感线将穿过线圈本身.当线圈中的电流发生变化时,它所激发的磁场穿过该线圈自身的磁通量也将随之变化,从而在该线圈自身产生感应电动势的现象,称为自感现象,由此产生的感应电动势称为自感电动势.

可以通过下述两个实验的对比来观察自感现象.如图 13.15a 所示,接通开关 K ,灯泡 A_1 立刻就亮,而灯泡 A_2 则逐渐变亮,最后与 A_1 亮度相同.该实验说明,由于 L 中存在自感电动势,电流的增大比较迟缓(楞次定律).如图 13.15b 所示,设开关 K 原本接通,灯泡以一定的亮度发光.当切断开关 K 时,灯泡先猛然一亮,然后逐渐熄灭.由此说明,当开关切断时,线圈 L 脱离电池,其电流从有到无,根据楞次定律,自感电动势应阻碍电流的减小,因此线圈的电流不会立刻减小到零.而此时线圈只与灯泡接通,且线圈的电阻比灯泡的电阻小得多,在切断开关的瞬间,线圈中产生比灯泡电流大的感应电流而使灯泡猛然一亮,最终灯泡逐渐熄灭.

设闭合回路中的电流强度为 i ,根据毕奥—萨伐尔定律,空间任一点的磁感强度

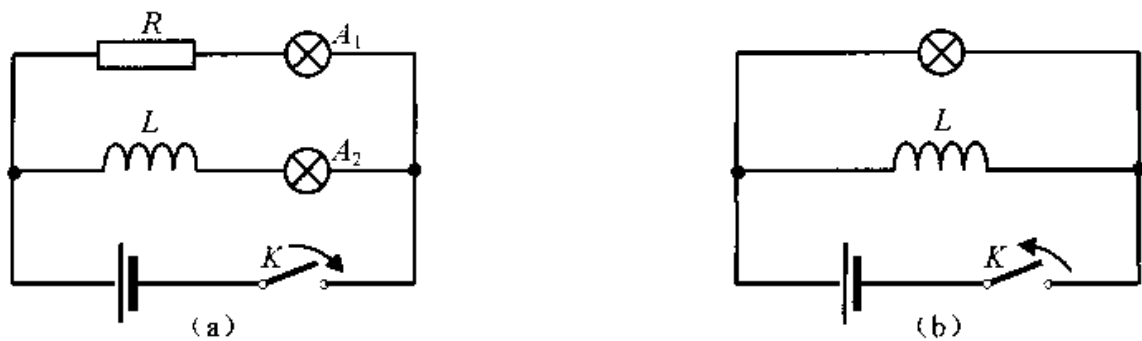


图 13.15 自感现象

都与回路中的电流强度 i 成正比. 因此, 穿过该回路所包围面积内的磁链也与 i 成正比, 即

$$\Psi = Li \quad (13-10)$$

式中比例系数 L 称为回路的自感系数(自感). 实验表明, 自感系数与回路电流的大小无关, 其决定于线圈回路的几何形状、大小、线圈匝数及周围磁介质的磁导率. 在国际单位制中, 自感的单位为亨利, 符号为 H . 从上式可见, 某回路的自感 L 在数值上等于回路中通过单位电流时穿过回路所包围面积的磁链.

根据法拉第电磁感应定律, 回路中所产生的自感电动势在自感 L 一定时可表示为

$$\epsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (13-11)$$

式中的负号是楞次定律的符号表示, 它指出自感电动势将反抗回路中电流的改变. 由上式可知, 自感系数 L 的物理意义: 自感系数表征了回路本身的一种电磁属性. 显然, 回路的自感系数愈大, 自感的作用也愈大, 则改变该回路中的电流也愈不易. 换句话说, 回路的自感有使回路保持原有电流不变的性质, 这一特性和力学中物体的惯性相仿. 因而, 自感系数可认为是描述回路“电磁惯性”的一个物理量.

在许多电器设备中, 常利用线圈的自感起稳定电流的作用. 日光灯的镇流器就是一个带有铁芯的自感线圈. 此外, 在电工设备中, 常利用自感作用制成自耦变压器或扼流圈. 在电子技术中, 利用自感器和电容器可以组成谐振电路或滤波电路等.

另一方面, 通常在具有相当大的自感和通有较大电流的电路中, 当扳断开关的瞬间, 在开关处将发生强大的火花, 产生弧光放电现象, 亦称电弧. 电弧发生的高温, 可用来冶炼、熔化、焊接和切割熔点高的金属, 温度可达 2000°C 以上, 有破坏开关、引起火灾的危险. 因此通常都用油开关, 即把开关放在绝缘性能良好的油里, 以防止

发生电弧。

例 13-3 一长为 l 、横截面为 S 的密绕长直螺线管,总匝数为 N ,管中介质的磁导率为 μ ,求其自感。

解 有电流通过螺线管时,忽略漏磁和端点处磁场的非均匀性,管内磁感强度的大小为

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

通过螺线管的磁链为

$$\Psi = NBS = \mu \frac{N^2 S}{l} I$$

由式(13-10)可得

$$L = \mu \frac{N^2}{l} S$$

设螺线管上单位长度的匝数为 n ,螺线管的体积为 $V = Sl$,则

$$L = \mu \left(\frac{N}{l} \right)^2 Sl = \mu n^2 V$$

由此可知,某个导体回路的自感系数只由回路的线圈匝数、大小、形状和介质的磁导率所决定,与回路中有没有电流无关。因此,和电容 C 、电阻 R 等一样,自感 L 也是表征电路元件本身电磁特性的一个物理量,各种不同的线圈具有不同的自感。

例 13-4 如图 13.16 所示,设有一电缆,由两个“无限长”同轴圆筒状的导体组成,其间充满磁导率为 μ 的磁介质,某时刻在电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流均为 i ,但方向相反,设内、外圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2 ,求单位长度电缆的自感。

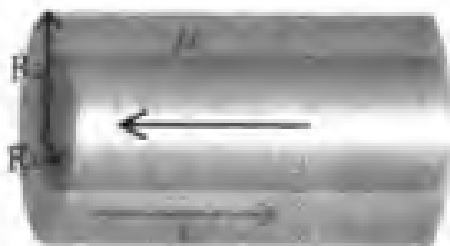


图 13.16

解 应用有磁介质时磁场的安培环路定理可知,在内圆筒以内及在外圆筒以外的区域中,磁场强度均为零。

在内、外两圆筒之间,离开轴线距离为 r 处的磁感强度为

$$B = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

任取一段长为 l 的电缆,穿过电缆纵剖面上的面积元 $dS = ldr$ 的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS = B l dr$$

对某一时刻而言, i 为一定值, 则长度为 l 的两圆筒之间的总磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由电感定义可知, 长度为 l 的这段电缆的自感

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

则单位长度电缆的自感为

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

二、互感

设有两个彼此邻近的导体回路 1 和 2, 分别通有电流 I_1 和 I_2 (如图 13.17 所示). I_1 激发的磁场, 有一部分磁感线要穿过回路 2 所围面积, 用磁通量 Φ_{21} 表示, 当回路 1 中的电流 I_1 发生变化时, Φ_{21} 也要变化, 因而在回路 2 内激起感应电动势 ϵ_{21} ; 同样, 回路 2 中的电流 I_2 变化时, 它也使穿过回路 1 所围面积的磁通量 Φ_{12} 变化, 因而在回路 1 中也激起感应电动势 ϵ_{12} . 上述两个载流回路相互地激起感应电动势的现象, 称为互感现象, 激起的感应电动势称为互感电动势.

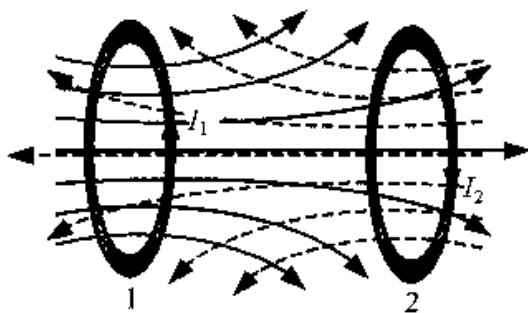


图 13.17 互感

假设上面两个回路的形状、大小、相对位置和周围磁介质的磁导率都不改变, 则根据毕奥-萨伐尔定律, 由 I_1 在空间任何一点激发的磁感强度都与 I_1 成正比, 相应穿过回路 2 的磁通量 Φ_{21} 也必然与 I_1 成正比, 即

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

同理, 对于 I_2 有

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$

式中, M_{21} 和 M_{12} 是两个比例系数, 它们只和两个回路的形状、大小、匝数、相对位置及其周围磁介质的磁导率有关. 理论和实验都可以证明, $M_{21} = M_{12} = M$, M 称为两个回路的互感系数, 简称互感. 则有

$$\Phi_{21} = M I_1, \Phi_{12} = M I_2 \quad (13-12)$$

由上式可知, 两个导体回路的互感在数值上等于其中一个回路为单位电流时,

穿过另一个回路所围面积的磁通量. 在国际单位制中, 互感的单位与自感相同, 都是亨利(符号为 H).

互感系数的计算一般很复杂, 常用实验方法来测定.

根据法拉第电磁感应定律, 可以计算互感电动势. 若上述回路 1 中电流强度 I_1 发生变化, 在回路 2 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - M \frac{dI_1}{dt} \quad (13-13a)$$

同理, 若回路 2 中电流强度 I_2 发生变化, 在回路 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - M \frac{dI_2}{dt} \quad (13-13b)$$

由上两式可知, 当一个回路中的电流随时间的变化率一定时, 互感系数越大, 则通过互感在另一回路中引起的互感电动势也越大; 反之亦然. 因此, 互感系数是表征两个回路相互感应强弱的物理量.

互感在电工和电子技术中应用很广泛. 通过互感线圈可以传递能量或信号; 利用互感现象的原理可制成变压器、感应圈.

但在有些情况中, 互感也有害处. 例如, 有线电话往往由于两路电话线之间的互感而有可能造成串音; 收录机、电视机及电子设备中也会由于导线或部件间的互感而影响正常的工作. 这些互感的干扰都要设法尽量避免.

例 13-5 如图 13.18(a) 所示, 在磁导率为 μ 的均匀无限大的磁介质中, 有一无限长直导线, 与宽为 b 、长为 l 的矩形线圈在同一平面内, 直导线与矩形线圈的一侧平行且相距为 a . 求它们的互感. 若将长直导线与矩形线圈如图 13.18(b) 放置, 它们的互感又为多少?

解 在图 13.18a 中, 设在无限长直导线中有恒定电流通过, 已知在距长直导线垂直距离为 x 处的磁感强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

则穿过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

由式(13-12) 可得它们的互感为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

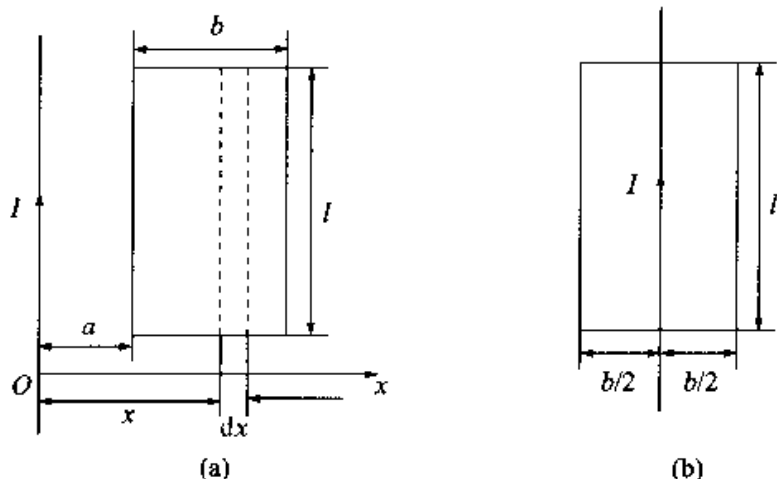


图 13.18

在图 13.18b 中,若仍设无限长直导线中的电流为 I ,则由于无限长载流直导线所激发的磁场的对称性,穿过矩形线圈的磁通量为零,即 $\Phi = 0$. 所以它们的互感为零,即 $M = 0$.

由上述结果可以看出,无限长直导线与矩形线圈的互感,不仅与它们的形状、大小、磁介质的磁导率有关,还与它们的相对位置有关.

§ 13.5 磁场的能量

磁场和电场一样,也具有能量.下面从分析自感现象中能量转换关系入手讨论.

设有自感为 L 的线圈,接入如图 13.19 所示的电路中.当电键 K 没有接通时,回路中无电流,线圈中也没有磁场.接通电键 K 瞬间,线圈中的电流从零迅速增加到稳定值 I . 线圈电流增加过程中,将在线圈中产生自感电动势 ε_L . 自感电动势的作用在于阻止电流的增加. 在这个过程中,电源提供的能量,一部分通过电阻转换为热能. 另一部分要克服自感电动势做功,转换为线圈中磁场的能量.

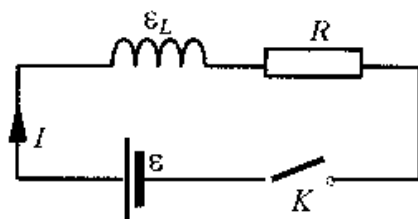


图 13.19 磁场的能量

设电流从零增加到 I 的过程中, t 时刻回路中的电流为 i ,则该时刻线圈中的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$

根据能量守恒定律,在 $t - t + dt$ 时间内,电源所作的功为 $ei dt$,等于 dt 时间内电阻 R

上放出的焦耳热 $i^2 R dt$ 和克服自感电动势所作的功 dA 之和, 即

$$\varepsilon_i dt = i^2 R dt + dA$$

其中

$$dA = -\varepsilon_i dt = Li di$$

线圈中电流从零增长到稳定值 I 的过程中, 电源克服自感电动势所作的功为

$$A = \int_0^I Li di = \frac{1}{2} LI^2$$

由于当电路中的电流从零增长到 I 时, 电路附近的空间只是逐渐建立起一定强度的磁场, 而没有其他的变化, 所以电源因克服自感电动势而作功所消耗的能量, 显然在建立磁场的过程中转换成了磁场的能量. 所以, 对自感为 L 的线圈来说, 当其电流达到稳定值 I 时, 线圈磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (13-14)$$

下面计算长直螺线管的磁场能量. 若长直螺线管线圈通有电流 I , 则管内磁感强度 $B = \mu n I$, 可知 $I = \frac{B}{\mu n}$, 将此式和 $L = \mu n^2 V$ 代入式(13-14), 得

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V$$

则单位体积内的磁场能量

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (13-15)$$

式中的 w_m 称为磁场中的磁场能量密度, 单位为焦耳每立方米, 符号为 J/m^3 . 上式表明, 磁场能量密度与磁感强度的二次方成正比. 对于均匀各向同性的介质, 由 $B = \mu H$ 上式可写为

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH \quad (13-16)$$

必须指出, 式(13-16) 虽然是从匀强磁场这种特殊情况下导出的, 但对非匀强磁场也是适用的. 在非匀强磁场中, 任一体积元 dV 内的 B 和 μ 都可看作是均匀的, 因此, 体积元 dV 内的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} BH dV$$

则在体积为 V 的有限空间内磁场能量为

$$W_m = \int_V dW_m = \int_V \frac{1}{2} BH dV$$

思考题

13-1 在电磁感应定律 $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中, 负号的含义是什么? 如何根据负号来判断感应电动势的方向?

13-2 如图 13.20, 通有电流 I 的长直导线 L 与矩形线框 $ABCD$ 共面, 判断下列情况下 $ABCD$ 上感应电动势的方向: (1) 矩形线框在纸面内向右移动; (2) 矩形线框绕 AD 轴旋转; (3) 矩形线框以直导线为轴旋转.

13-3 如图 13.21 所示, 判断以下几种形状的导线回路中, 感应电流的流向 (均匀磁场纸面向里, 且随时间减小).

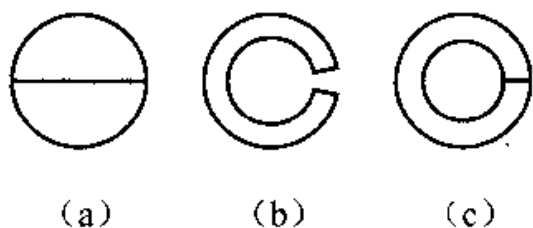


图 13.20

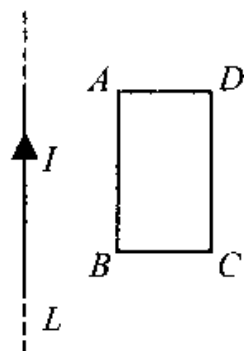


图 13.21

13-4 条形磁铁沿铜质圆环的轴线插入圆环时, 铜环中有感应电流和感应电场吗? 如用塑料圆环代替铜质圆环, 环中仍有感应电流和感应电场吗?

13-5 如图 13.22 所示, 均匀磁场被限制在半径为 R 的圆柱体内, 且其中磁感强度随时间变化律 $dB/dt = \text{常量}$, 试问: 在回路 L_1 和 L_2 上各点的 dB/dt 是否均为零? 各点的 E_i 是否均为零? $\oint_{L_1} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ 和 $\oint_{L_2} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ 各为多少?

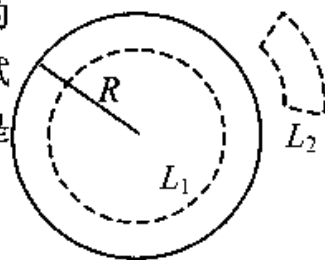


图 13.22

13-6 在变化的磁场空间中, 如果没有导体, 则这个空间是否存在电场, 是否存在感应电动势?

13-7 为什么在电子感应加速器中, 只有在 $1/4$ 的周期内才能对电子起加速作用?

13-8 一根很长的铜管竖直放置, 有一根磁棒由管中竖直下落. 试述磁棒的运

动情况.

13-9 如果要设计一个自感较大的线圈,应该从哪些方面去考虑?

13-10 长为 l 的单层密绕螺线管,绕有 N 匝导线,问在下列情况下,螺线管的自感 L 如何变化?

- (1) 将螺线管的半径增大一倍;
- (2) 换用直径比原来导线直径大一倍的导线密绕;
- (3) 在原来密绕的情况下,用同样直径的导线再顺序密绕一层;
- (4) 在原来密绕的情况下,用同样直径的导线再反方向密绕一层.

13-11 试说明:(1)当线圈中的电流增加时,自感电动势的方向和电流的方向相同还是相反;(2)当线圈中的电流减小时,自感电动势的方向和电流的方向相同还是相反.为什么?

13-12 互感电动势与哪些因素有关?要在两个线圈间获得较大的互感,应该用什么办法?

习 题

13-1 一匝数 $N = 100$ 的线圈,通过每匝线圈的磁通量为 $\Phi = 5 \times 10^{-3} \sin 10\pi t \text{Wb}$. 求:

- (1) 任意时刻线圈内感应电动势的大小;
- (2) 在 $t = 10\text{s}$ 时,线圈内感应电动势的大小.

13-2 有两根相距为 d 的无限长平行直导线,它们通以大小相等、流向相反的电流,且电流均以 dI/dt 的变化率增长.若有一边长为 d 的正方形线圈与两导线处于同一平面内,如图 13.23 所示,求线圈中的感应电动势.

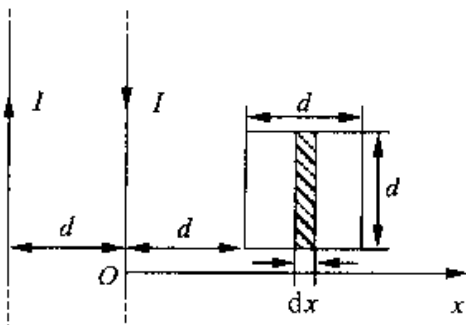


图 13.23

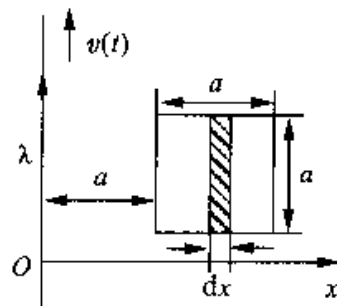


图 13.24

13-3 如图 13.24 所示,一电荷线密度为 λ 的长直带电线(与一正方形线圈共面并与其一对边平行),以变速率 $v = v(t)$ 沿着其长度方向运动,正方形线圈的总电阻为 R . 求 t 时刻线圈中感应电流的大小(不计线圈自身的自感).

13-4 长为 L 的铜棒,以距端点 r 处为支点,并以角速率 ω 绕通过支点且垂直于铜棒的轴转动. 设磁感强为 B 的均匀磁场与轴平行,求棒两端的电势差. 如图 13.25 所示.

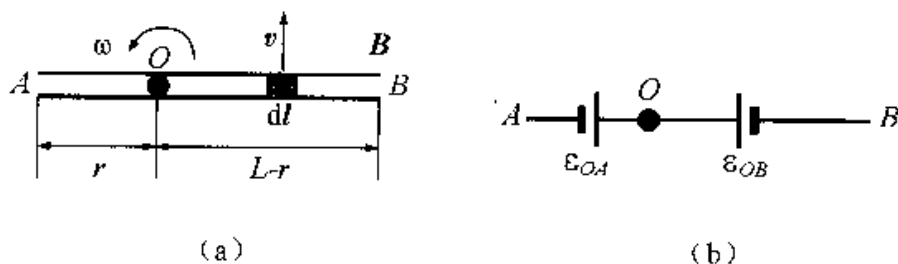


图 13.25

13-5 如图 13.26 所示,长为 1m 的金属棒 OA 绕通过 O 端的 OZ 轴旋转,棒与 OZ 轴夹角为 30° ,棒的角速度为 $60\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$,磁场 B 的方向与 OZ 轴相同,大小为 0.2T . 求 OA 上动生电动势的大小和方向.

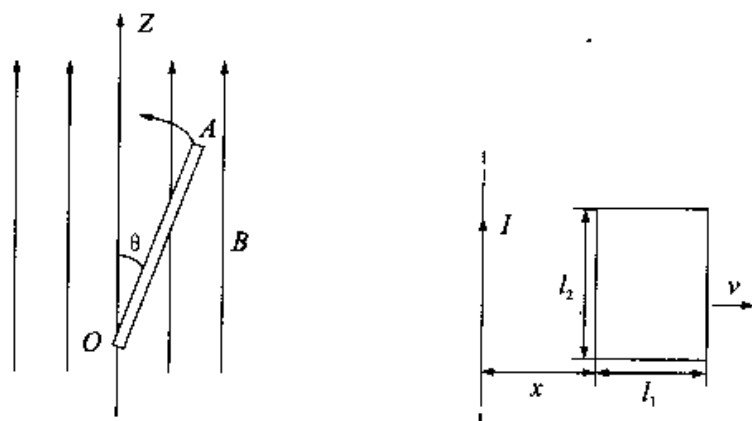


图 13.26

13-6 如图所示,一长直导线与边长为 l_1 和 l_2 的矩形导线框共面,且与它的一边平行. 线框以恒定速率 v 沿与长直导线垂直的方向向右运动. (1) 若长直导线中的电流为 I ,求线框与直导线相距 x 时穿过线框的磁通量、线框中感应电动势的大小和方向; (2) 若长直导线中通以交变电流 $I = I_0 \sin(\omega t)$,求任意位置任意时刻线框中的感应电动势.

13-7 有一磁感强度为 B 的均匀磁场,以恒定的变化率 $\text{d}B/\text{d}t$ 在变化. 把一块

质量为 m 的铜,拉成截面半径为 r 的导线,并用它做成一个半径为 R 的圆形回路,圆形回路的平面与磁感强度 B 垂直.试证:回路中的感应电流为

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \cdot \frac{dB}{dt}$$

式中 ρ 为铜的电阻率, d 为铜的密度.

13-8 如图 13.27 半径为 2.0cm 的无限长直载流密绕螺线管,管内磁场可视为均匀磁场,管外磁场可近似看作零.若通电电流均匀变化,使得磁感强度 B 随时间的变化率 dB/dt 为常量,且为正值.试求:(1)管内外由磁场变化而激发的感生电场分布;(2)如 $dB/dt = 0.010\text{T} \cdot \text{s}^{-1}$,求距螺线管中心轴为 5.0cm 处的感生电场的大小和方向.

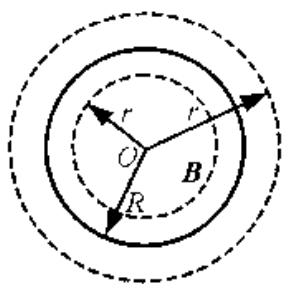


图 13.27

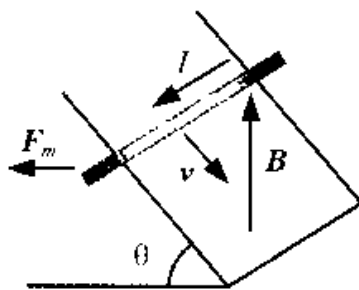


图 13.28

13-9 如图 13.28 所示,导体可沿倾斜的金属框架无摩擦地下滑,已知回路总电阻为 R ,导体长为 l ,框架倾角为 θ ,竖直方向磁场的磁感强度 B 以及导体质量 m 均已知.求导体下滑时所达到的稳定速度.

13-10 如图 13.29 所示,一半径为 R 、电阻率为 ρ 的金属薄圆盘放在磁场中, B 的方向垂直于盘面,大小为 $B(t) = B_0 t / \tau$,式中 B_0 和 τ 为常量, t 为时间.(1)求盘中产生的涡电流的电流密度;(2)若 $r = 0.20\text{m}$, $\rho = 6.0 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$, $B_0 = 2.2\text{T}$, $\tau = 18.0\text{s}$,计算圆盘边缘处的电流密度.

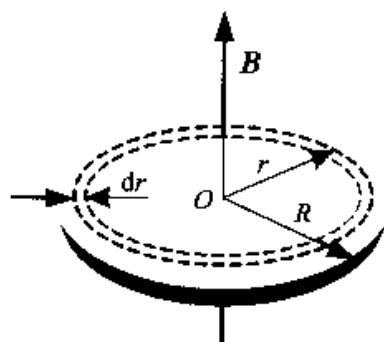


图 13.29

13-11 在长为 0.60m、直径为 5.0cm 的圆纸筒上应绕多少匝线圈才能使绕成的螺线管的自感为 $6.0 \times 10^{-3}\text{H}$?

13-12 一长为 0.50m、横截面积为 10.0cm^2 的空心长直螺线管,若其上密绕线圈 3000 匝,则:(1)自感为多少?(2)若其中电流随时间的变化率为 $10\text{A} \cdot \text{s}^{-1}$,自感

电动势的大小和方向如何?

13-13 如图 13.30 所示,两个线圈的自感系数分别为 L_1, L_2 , 其互感系数为 M . 证明:当两个线圈串联时,整个电路的自感为 $L = L_1 + L_2 \pm 2M$, 并说明何时用加号,何时用减号.

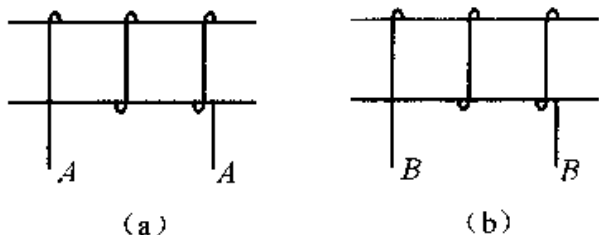


图 13.30

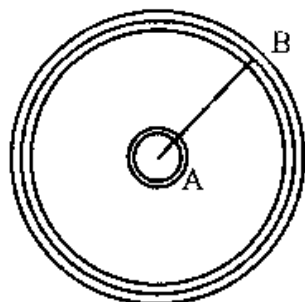


图 13.31

13-14 有两个长为 l 的共轴套装长直密绕螺线管,半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 匝数分别为 N_1 和 N_2 , 试计算它们的互感系数 M_{12} 和 M_{21} , 并验证 $M_{12} = M_{21}$.

13-15 如图 13.31 所示,一面积为 4.0cm^2 共 50 匝的小圆形线圈 A, 放在半径为 20cm 共 100 匝的大圆形线圈 B 中的正中央. 此两线圈同心且同平面. 设线圈 A 内各点的磁感强度可看作是相同的. 求: (1) 两线圈的互感; (2) 当线圈 B 中电流的变化率为 $-50\text{A} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 线圈 A 中的感应电动势的大小和方向.

13-16 如图 13.32 所示,一长直导线与一高为 h 的等边三角形线圈共面, 线圈的一边平行于直导线且距离为 b , 求它们的互感.

13-17 一匝数为 1000、直径为 1cm 、长为 10cm 的长直密绕螺线管, 总电阻为 7.76Ω . (1) 若把线圈接到电动势为 2.0V 的电池上, 求电流稳定后线圈中储存的磁场能量及磁能密度; (2) 从接通电路算起, 要使线圈储存磁能为最大值的一半, 需经过多长时间?

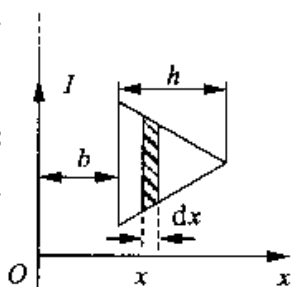


图 13.32

13-18 半径为 R 的圆柱形长直导体, 均匀流过电流 I , 求单位长度导体内储存的磁能.

13-19 真空中有一均匀电场的电场能量密度与一 0.50T 的均匀磁场的磁能密度相等, 试求该电场的电场强度.

13-20 有一自感为 2.0H 、电阻为 10Ω 的线圈, 把它接到电动势为 100V 、内阻可忽略的电池组上. 求电路中电流达到稳定时, 磁场的能量.

第 14 章 麦克斯韦方程组和电磁波

麦克斯韦在总结了从库仑到安培、法拉第等人关于电磁学研究的成果的基础上,建立了著名的电磁场理论(现在称为经典电磁场理论),提出了“有旋场”和“位移电流”的假说,指出变化的电场和磁场形成统一的电磁场,预言电磁场能够以波动的形式在空间传播,称为电磁波,并且算出电磁波在真空中传播的速度等于光速,从而断定光在本质上就是一种电磁波。后来,赫兹用振荡电路产生了电磁波,使麦克斯韦的学说得到了实验证明,为电学和光学奠定了统一的基础。因此,麦克斯韦的经典电磁场理论是人类对电磁规律的历史性总结,可以这么说,麦克斯韦的电磁场理论,乃是 19 世纪物理学发展的最辉煌成就,在物理学发展史上是一个重要的里程碑。

本章的主要内容是,通过研究麦克斯韦关于“有旋场”和“位移电流”的假说,进一步了解电场和磁场之间的相互关系,并在此基础上,介绍描述电磁场的麦克斯韦方程组以及电磁振荡、电磁波等电磁场理论的基本内容。

§ 14.1 位移电流

一、位移电流

麦克斯韦对电磁场的重大贡献的核心是位移电流的假说。位移电流是将安培环路定理运用于含有电容器的交变电路中出现矛盾而引出的。



麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831 年—1879 年), 19 世纪伟大的英国物理学家, 经典电动力学的创始人, 统计物理学的奠基人之一。麦克斯韦十岁进入爱丁堡科学院的学校, 十四岁获科学院的数学奖。1854 年, 毕业于剑桥大学, 以后根据开尔文的建议, 开始研究电学及法拉第的力线。1855 年, “论法拉第的力线”问世。1860 年, 与法拉第见面。1861 年—1862 年, 《论物理力线》分四部分发表, 提出涡旋电场与位移电流的假设, 集成并发

展了法拉第关于电磁相互作用的思想. 1864年,《电磁场的动力理论》向英国皇家协会宣读,将所有电磁现象概括为一组偏微分方程组,预言了电磁波的存在,并确认光也是一种电磁波,从而创立了经典电动力学. 1865年,上述论文发表在《哲学杂志》上. 1873年,公开出版《电磁学理论》一书,这是一部几乎包括了库仑以来的全部关于电磁研究信息的经典著作,在数学上证明了方程组解的惟一性定理,从而证明了方程组内在的完备性. 麦克斯韦还在气体运动理论、光学、热力学、弹性理论等方面有重要贡献. 爱因斯坦在自传中说:“在我求学的时代,最吸引人的题目就是麦克斯韦的理论”,“特殊的相对论起源于麦克斯韦的电磁场方程”. 1931年,在纪念麦克斯韦诞生100周年时,爱因斯坦把麦克斯韦的电磁场贡献评价为自“牛顿时代”以来物理学所经历的最深刻最有成效的变化.

我们知道,在稳恒电流中传导电流是处处连续的,稳恒电流磁场的安培环路定理为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I_c$$

式中 I_c 是穿过以 L 回路为边界的任意曲面 S 的传导电流. 那么,在非稳恒条件下,安培环路定理是否还成立?

我们通过一个特例来分析. 在电容器充放电的过程中,对整个电路来说,传导电流是不连续的. 如图 14.1(a) 所示,电容器放电过程中,电路导线中的电流 I 是非恒定电流,它随时间而变化. 如图 14.1(b) 所示,若在极板 A 的附近取一个闭合回路 L ,则以此回路 L 为边界可作两个曲面 S_1 和 S_2 ,其中 S_1 与导线相交, S_2 在两极板之间,不与导线相交; S_1 和 S_2 构成一个闭合曲面. 现以曲面 S_1 作为衡量有无电流穿过 L 所包围面积的依据,则由于其与导线相交,故知穿过 L 所围面积即 S_1 面的电流为 I ,所以由安培环路定理有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

而若以曲面 S_2 为依据,则没有电流通过 S_2 ,于是由安培环路定理有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由此说明,安培环路定理在非稳恒电流磁场中出现了矛盾的情况,必须以新的规律来代替它.

建立一个更普遍规律的途径有两条,一是通过更进一步的实验来揭示问题的实质,二是在理论分析的基础上,提出可能的假设,然后再用实验来检验它. 麦克斯韦

为了得到非稳恒电流产生的磁场中的安培环路定理,提出了位移电流的假设.

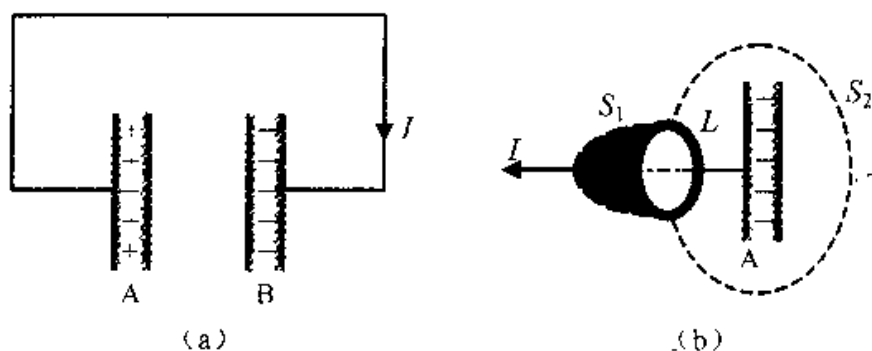


图 14.1 含有电容器的电路中,传导电流不连续

通过对电容器充放电过程的分析,可以发现,虽然传导电流在电容器两个极板之间中断了,但是与此同时,两个极板之间却出现了变化的电场.

以平行板电容器的充电为例.设任一时刻正、负极板上分别有正、负电荷 q ,其面电荷密度为 σ ,它们都随时间而增大.设电容器每一极板的面积为 S ,电路中的充电电流为 I_c ,则

$$I_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d(S\sigma)}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

传导电流密度为

$$j_c = \frac{d\sigma}{dt}$$

已知,此时两极板间的电位移矢量的大小($D = \sigma$)和电位移通量($\Phi_D = DS = \sigma S$)也都随时间而变化,分别代入上两式有

$$I_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt}, \quad j_c = \frac{dD}{dt}$$

可见,两极板之间电位移通量随时间的变化率,在数值上等于电路中的充电电流 I_c .并且还可看出,当电容器充电时,极板间 dD/dt 的方向也是由正极板指向负极板,与电路中传导电流密度的方向相同.因此,麦克斯韦把变化电场假设为电流,引入位移电流的概念:通过电场中某截面的位移电流 I_d 等于通过该截面的电位移通量的时间变化率;电场中某点的位移电流密度 j_d 等于该点电位移的时间变化率.即

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}, \quad j_d = \frac{dD}{dt} \quad (14-1)$$

麦克斯韦认为,位移电流和传导电流一样,都能激发磁场,该磁场和与它等值的

传导电流所激发的磁场完全相同. 这样, 在整个电路中, 传导电流中断的地方就由位移电流来接替, 而且它们的数值相等, 方向一致. 对于普遍的情况, 麦克斯韦认为传导电流和位移电流都可能存在. 于是, 他推广了电流的概念, 将二者之和称为全电流, 用 I_c 表示为

$$I_c = I + I_d \quad (14-2)$$

对于任何回路, 全电流是处处连续的. 运用全电流的概念, 可以自然地将安培环路定律推广到非稳恒电流磁场中去, 从而, 也就解决了电容器充放电过程中电流的连续性问题.

从式(14-1)可见, 麦克斯韦位移电流假设的核心是变化着的电场激发有旋磁场. 位移电流虽有“电流”之名, 但它本质上是变化的电场. 麦克斯韦的位移电流假设已由它所导出的许多结论和实验结果而得到证实.

二、全电流安培环路定理

根据全电流概念, 在一般情况下, 安培环路定理被修正为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c = I + \frac{d\Phi_D}{dt} \quad (14-3a)$$

或
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} \quad (14-3b)$$

上式表明, 磁场强度 \mathbf{H} 沿任意闭合回路的环流等于穿过此闭合回路所围曲面的全电流, 这就是全电流安培环路定理. 式(14-3)说明不仅传导电流可以在空间激发磁场, 变化的电场也可以在空间激发磁场, 且均为有旋磁场. 这就是说, 在磁效应方面, 位移电流和传导电流等效. 显然, 形成位移电流不需要导体, 它不会产生热效应.

由此可见, 位移电流的引入, 深刻地揭露了变化电场和磁场的内在联系. 为什么人们对司空见惯的电容器中电流不连续的现象视而不见, 而麦克斯韦却能引出位移电流概念呢? “只有那种有准备的头脑, 才不会放过科学的机遇.” 麦克斯韦正是以他严谨治学、为科学奋斗不息及注意辩证思维的精神为人类作出了巨大的贡献.

§ 14.2 麦克斯韦方程组

关于静电场和稳恒磁场的基本规律, 可总结归纳成以下四条基本定理.

(1) 静电场的高斯定理

$$\oint_V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q$$

(2) 静电场的环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

(3) 稳恒磁场的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(4) 磁场的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I_i$$

上述这些定理都是孤立地给出了静电场和稳恒磁场的规律,对变化电场和变化磁场并不适用。

麦克斯韦在稳恒场理论的基础上,提出了有旋电场和位移电流两个重要的假设,并在总结了电场和磁场的相互激发的规律之后,将静电场的环流定理修改为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

将安培环路定理修改为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_i + I_d = \int_S (\mathbf{j}_i + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$$

使它们能适用于一般的电磁场。

麦克斯韦还认为静电场的高斯定理和磁场的高斯定理不仅适用于静电场和稳恒磁场,也适用于一般电磁场。于是,得到电磁场的四个基本方程

$$\oint_V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q \quad (14-4a)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (14-4b)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14-4c)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{j}_i + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} \quad (14-4d)$$

上述四个方程就是麦克斯韦方程组的积分形式。麦克斯韦方程是宏观电磁场理论的基本方程,在具体应用这些方程时,还要考虑到介质特性对电磁场的影响,即

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

运用高等数学中的高斯公式和斯托克斯公式,可将麦克斯韦方程组的积分形式变为微分形式.微分形式的方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (14-5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14-5b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14-5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (14-5d)$$

麦克斯韦方程组全面地反映了变化的电场和变化的磁场彼此不是孤立的,它们永远密切地联系在一起,相互激发,组成一个统一的电磁场的整体,所以把电场和磁场统称为电磁场.麦克斯韦方程组对电荷、电流、电场、磁场之间的相互作用作出了全面的描述.所有关于电磁场的性质,原则上都可由该组方程得出,所以麦克斯韦方程组在电磁学中的地位,相当于牛顿定律在经典力学中的地位,是19世纪最伟大的成就之一.

§ 14.3 电磁振荡

一、无阻尼自由电磁振荡

考虑一个由自感线圈 L 和电容器 C 组成的回路,若回路中电阻为零,则该回路称为 LC 回路.利用外接电源对电容器充电后与电源断开.在电容器开始放电之前瞬间,电路中没有电流,电能全部集中在电容器的两极板之间的电场中,如图 14.2(a) 所示.电容器两极板之间的电势差使正电荷从正极板经自感线圈流至负极板.由于线圈 L 的自感作用,电路中的电流不能立刻达到最大值,而是随着电容器极板上电荷的减少而逐渐增大.当电容器两极板的电荷为零时,电路中的电流达到最大值,与电流相联系的磁场能量也达到最大.此时,电容器两极板间的电场为零,电场能量全部转换成自感线圈内的磁场能量,如图 14.2(b) 所示.当电流达到最大值开始减小时,由楞次定律可知,电路中感应电流的方向应与原电流方向一致,使电容器反向充电,直到两极板的电量达到最大值,反向充电过程结束.此时,磁场完全消失,电路中的电流为零,磁场能量全部转换成电容器两极板之间的电场能量,如图 14.2(c) 所示.在这以后,电容器又开始反向放电过程,直至两极板上的电荷全部消失,电路中

的电流达到反向最大值, 电场能量又全部转换成磁场能量, 如图 14.2(d) 所示. 此后, 电容器又被充电, 当电路中反向电流减小为零时, 电容器两极板上的电荷达到最大值并恢复到原始状态, 以后又重复上述一系列过程.

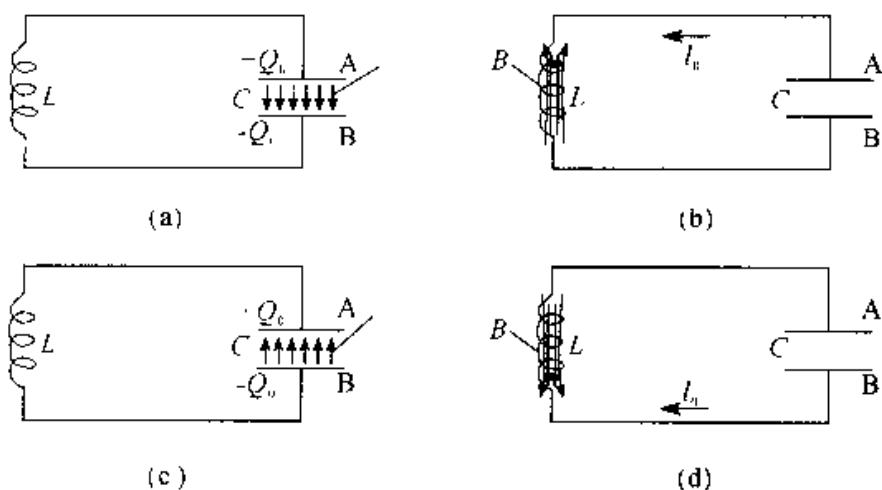


图 14.2 无阻尼自由电磁振荡

这种电荷和电流、电场和磁场随时间作周期性变化的现象, 称为电磁振荡. 若电路中没有任何能量的损耗(电阻为零、无辐射等), 这种电磁振荡将在电路中一直继续下去, 把这种现象称为无阻尼自由电磁振荡, 亦称 LC 电磁振荡.

二、无阻尼自由电磁振荡的振荡方程

在无阻尼自由电磁振荡电路中, 任何时刻电场能量和磁场能量的总和应保持不变, 即

$$\frac{1}{2C}Q^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \text{常量}$$

式中 Q 为某一时刻电容器极板上所带的电荷, I 为该时刻回路中的电流. 将上式对 t 同时求导, 可得

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

因为 $I = dQ/dt$, 上式可写成

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q$$

令 $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, 则有

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\omega^2 Q$$

这个方程和力学中的简谐运动方程形式完全相同,其解为

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (14-6)$$

式中 Q 为任一时刻电容器极板上的电荷, Q_0 为其最大值,称为电荷振幅, φ 为初相, Q_0 和 φ 的数值由电路的初始条件决定. ω 为振荡的角频率,则振荡频率 ν 和振荡周期 T 分别为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}, \quad T = 2\pi \sqrt{LC} \quad (14-7)$$

上式表明,无阻尼自由电磁振荡的频率,是由振荡电路本身的性质,即由线圈的自感系数 L 和电容器的电容 C 所决定.

将式(14-6)两边对时间求导,可得电路中电流随时间作周期相变化的规律.

三、无阻尼自由电磁振荡的能量

设电容器的极板上带有电荷 Q ,则电容器中的电场能量为

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (14-8)$$

上式表明无阻尼自由电磁振荡电路中电场能量是随时间作周期性变化的.当自感线圈中通过电流 I 时,线圈中的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (14-9)$$

上式表明无阻尼自由电磁振荡电路中磁场能量也是随时间作周期性变化的.则无阻尼自由电磁振荡电路中的总能量为

$$W = W_e + W_m = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (14-10)$$

可见,在无阻尼自由电磁振荡过程中,电场能量和磁场能量不断相互转换,但在任意时刻,其总和保持不变.在电场能量最大时,磁场能量为零;反之,磁场能量最大时,电场能量为零.

应当指出,无阻尼自由电磁振荡中的电磁场能量守恒是有条件的.首先,电路中的电阻必须为零,这样在电路中才会避免因电阻产生的焦耳热而损耗电磁能;其次,

电路中不存在任何电动势,即没有其他形式的能量与电路交换;最后,电磁能还不能以电磁波的形式辐射出去.但实际上任何振荡电路都有电阻,电磁能量不断地转换为焦耳热,而且在振荡过程中,电磁能量不可避免地还会以电磁波的形式辐射出去.因此,无阻尼自由电磁振荡电路是一个理想化的振荡电路模型.

§ 14.4 电磁波

根据麦克斯韦电磁场理论,如果在空间某区域内有交变的电场,那么在它邻近的区域就会产生交变的磁场,这样变化的磁场又要在较远的区域产生新的交变的电场,如此继续下去,变化的电场和变化的磁场不断相互交替产生,由近及远地传播出去.这种变化的电磁场在空间以一定的速度传播,就形成了电磁波.

一、赫兹实验

1888年,赫兹利用振荡电偶极子和共振吸收的原理,用实验方法证实了电磁波的存在,并验证了电磁波与光波在性质上相同.至此,麦克斯韦电磁场理论才获得了实验的证明.

在图 14.10 中,接到感应圈的两个电极上的两根共轴的黄铜杆 A 、 B ,是赫兹用以产生电磁波的振荡电偶极子,感应圈能够周期性地在它的两极上产生很高的电势差.偶极子 A 、 B 中间所以留有一个空隙,是为了使偶极子被充电到很高的电势差时才开始击穿空气放电,电流往复地通过空隙而产生火花,两根杆就被连成一条导电通路,这时它相当于一个振荡电偶极子.由于偶极子的电容和自感都很小,因而振荡频率很高,其频率的数量级是 10^8 Hz.

为了探测由振荡电偶极子发射出来的电磁波,赫兹仍用一个完全相似的装置,即留有空隙的直铜杆 CD (如图 14.3),并将这铜杆放在振荡电偶极子的附近.套在杆 CD 上的套子可以调节其长短,用来改变此杆的固有频率.当偶极子振荡并发射电磁波时,由于电磁感应,杆 CD 会产生电磁受迫振荡,在空隙中也就有火花发生.当这铜杆的固有频率等于振荡偶极子的振荡频率时,形成共振,火花更强.所以,这铜杆称为谐振器.

赫兹还用各种实验,证明了不仅电磁波的性质和光波的相同,而且传播的速度也相同,并且可发生反射、折射、干涉、衍射和偏振等现象.也就是说,电磁波服从一

般波动所具有的一切规律。

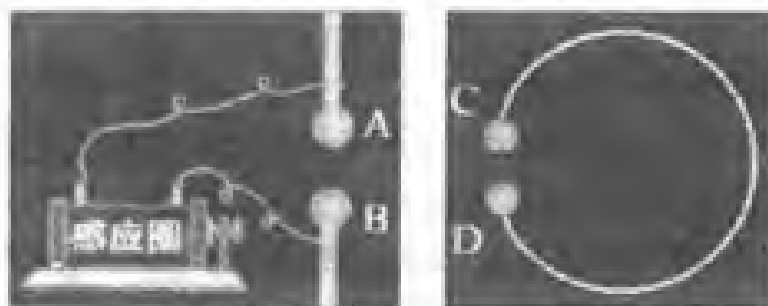


图 14.3 赫兹实验

二、电磁波的产生与传播

从上分析可知,要想产生电磁波,首先必须有适当的波源,作为 LC 振荡电路所形成的变化电场和变化的磁场几乎分别局限在电容器的极板间和自感线圈中,而不能显著地向外辐射电磁能量。

理论上已经证明,电磁波在单位时间内辐射的能量与频率的四次方成正比。综上所述,为了使电磁能量有效地传播出去,振荡电路需满足如下条件:

(1) 振荡电路所产生的电场和磁场散布到周围空间中去,也就是说,电路必须开放,这样才能更有效地把能量辐射出去。

(2) 提高辐射频率,这样才能更好地把能量辐射出去。

如果我们把电容器两极板间的距离拉大,减小极板面积,同时减少线圈匝数并逐渐拉直,最后简化成一根直导线,如图 14.4 所示。这样,电场和磁场便能发散到周围空间中去。同时,由于 L 和 C 的减小可以提高电路的振荡频率,所以,如果在直线形的电路上引起电磁振荡,直线形电路的两端就会出现交替的等量异号电荷,称为振荡电偶极子,可利用此电路作为发射电磁波的波源。



图 14.4 电磁波的发射

下面以振荡电偶极子为例,说明电磁波的产生与传播过程。设振荡电偶极子的

电偶极矩 p 可表示为

$$p = p_0 \cos \omega t$$

式中 p_0 为电偶极矩的振幅, ω 为角频率.

振荡电偶极子的正负电荷间距处于不断交替变化中, 其电场和磁场也将随时间不断变化. 振荡电偶极子的运动可以简化为正负电荷相对于它们的公共中心作简谐振动, 此时电场的变化如图 14.5 所示. 设初始时刻正负电荷均在如图 14.5(a) 所示的中心处, 然后, 正负电荷分别作相位相反的振动. 当它们分别向上、向下移动产生一定距离后, 两电荷间的某一条电场线形状可如图 14.5(b) 所示. 再当两电荷逐渐向中心处靠近时, 电场线也将逐渐变成如图 14.5(c) 所示的形状. 然后, 正负电荷又回到中心处重合 (完成前半个周期的谐振动), 其电场线的形状此时变成闭合状, 如图 14.5(d) 所示. 在后半个周期的谐振动过程中, 正负电荷的位置将互相对调, 电场线的方向如图 14.5(e) 所示. 当后半个周期结束时, 又会形成一条环绕方向与上述相反的一条闭合电场线. 闭合电场线的形成表明此时已产生了涡旋电场.

以上只对振荡电偶极子附近一条闭合电场线的形成过程进行了分析. 实际上, 在距离振荡电偶极子较远的范围内, 电场线都是闭合的, 而且波面随着距离的增大逐渐趋于球形, 电场强度也趋于切线方向. 此外, 振荡电偶极子产生的磁场的磁感线是一系列以电偶极子为轴的同心圆. 若用曲线表示电场线, 以 \odot 和 \otimes 分别表示穿入和穿出纸面的磁场线, 则某时刻振荡电偶极子周围电磁场的大致分布情况如图 14.6 所示. 经过一段时间后, 电场线和磁场线便以波的传播速度向外逐渐扩张, 由近及远地辐射出去.

振荡电偶极子所产生的电场和磁场的函数表达式可用麦克斯韦方程求解 (推导从略). 下面给出在离振荡电偶极子足够远的区域内的结果.

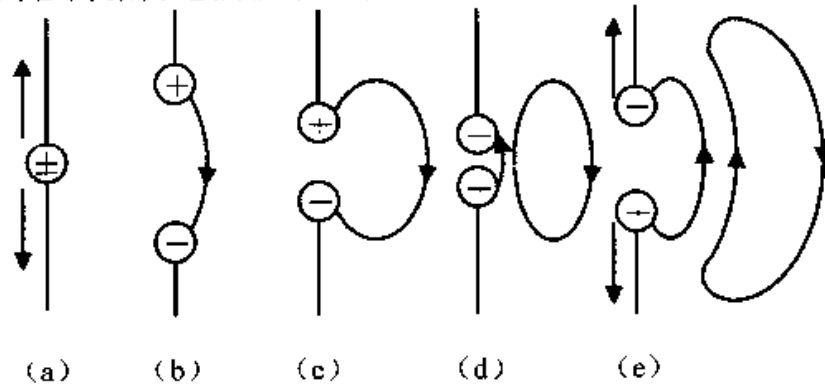


图 14.5 振荡电偶极子附近的电场线

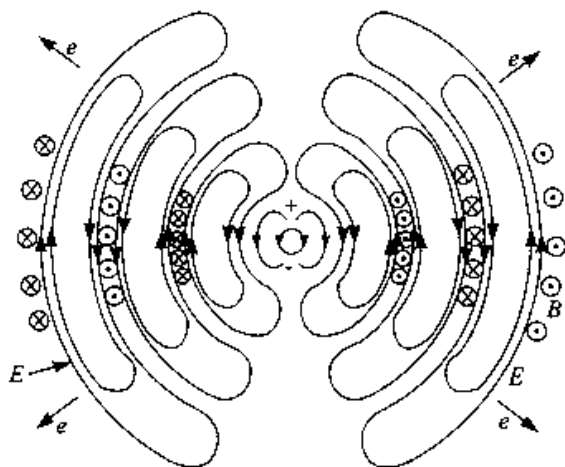


图 14.6 振荡电偶极子周围的电磁场

如图 14.7 所示, 振荡电偶极子位于原点处, 电矩 p 的方向沿图中极轴的方向, 在球面上任取一点 P , 其矢径 r (也是波的传播方向) 与极轴方向的夹角为 θ . 计算结果表明, P 点的电场强度 E 、磁场强度 H 和矢径 r 三个矢量相互垂直, 并成右手螺旋关系, 即矢积 $E \times H$ 的方向与 r 的方向一致. P 点的 E 和 H 的数值分别为

$$E(r, t) = \frac{\mu p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) \quad (14-11)$$

$$H(r, t) = \frac{\sqrt{\epsilon\mu} p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right) \quad (14-12)$$

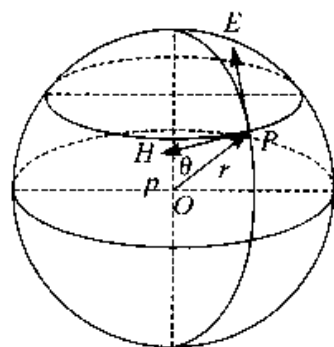


图 14.7 远离振荡电偶极子处 E 和 H 的方向

式中 u 为电磁波的传播速度, 它与介质的电容率 ϵ 和磁导率 μ 的关系为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

真空中 u 的数值为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个值与光在真空中的速度完全相等. 式(14-11)和式(14-12)就是距离振荡电偶极子足够远的球面电磁波的波函数, 而且 E 和 H 的数值都与 θ 角有关, 表明振荡电偶极子的辐射具有明显的方向性.

考虑距离振荡电偶极子很远的地方, 小范围内 θ 和 r 的变化很小, E 和 H 的振幅可看作常量, 振荡电偶极子辐射的电磁波可看作是平面波, 则式(14-11)和式(14-

12) 可分别写成

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad (14-13)$$

$$H = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad (14-14)$$

这就是平面电磁波的波函数,从中可看出,在距离振荡电偶极子很远的区域,电磁波已呈现为平面波,如图 14.8 所示.

上述结论虽然是从振荡电偶极子得出的,但其具有普遍性,适用于任何作加速运动的电荷所辐射的电磁波.

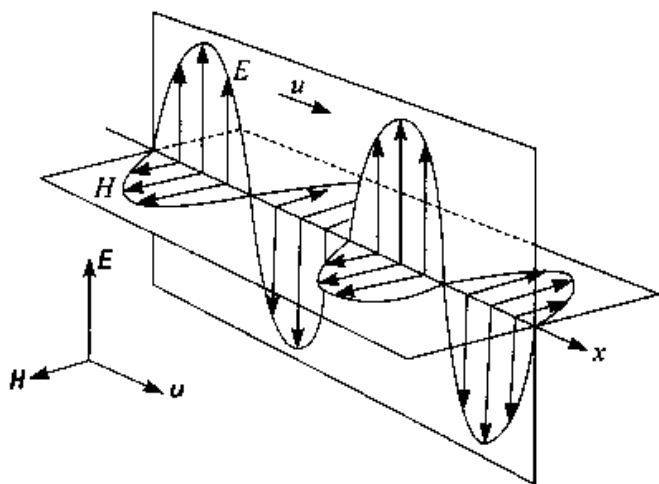


图 14.8 平面电磁波

三、电磁波的性质

根据以上的讨论,在距离波源足够远的区域内,电磁波的基本性质如下:

(1) 电磁波的电场强度 E 、磁场强度 H 和传播速度 u 三者相互垂直,这说明电磁波是横波.

(2) 电场强度 E 、磁场强度 H 振动相位相同,且 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$.

(3) 沿着给定的方向传播的电磁波,电场强度 E 、磁场强度 H 分别在各自的平面上振动(如图 14.8 所示),这一特性称为横波的偏振性.

(4) 电场强度 E 、磁场强度 H 以相同的波速 $u = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 传播,在真空中电磁波的速度等于光速.

四、电磁波的能量

由于电磁场具有能量,所以随着电磁波的传播,就有能量的传播.这种以电磁波形式传播出去的能量,叫做辐射能.

已知,电场的能量密度和磁场的能量密度分别为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2, w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

所以,电磁场的总能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (14-15)$$

由于电磁波的能量密度决定于 E 和 H , 所以辐射能的传播速度就是电磁波的传播速度, 辐射能的传播方向就是电磁波的传播方向。

在单位时间内通过垂直于传播方向上单位面积的辐射能量 S , 即为电磁波的能量密度, 可写成

$$S = wu \quad (14-16)$$

将式(14-15)代入上式, 并由 $u = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 和 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ 可得

$$S = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \right) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} (\sqrt{\epsilon}E \sqrt{\mu}H + \sqrt{\mu}H \sqrt{\epsilon}E)$$

化简得
$$S = EH \quad (14-17)$$

由于 E 和 H 两者互相垂直, 并且都垂直于传播方向, 而辐射能的传播方向就是电磁波的传播方向, 故式(14-17)可用矢量表示为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

式中的三个矢量 E , H 和 S 组成了右手螺旋(如图 14.9 所示), S 为电磁波的能量密度矢量, 也称为坡印廷矢量。

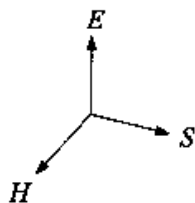


图 14.9

将式(14-11)和式(14-12)代入式(14-17), 得振荡电偶极子于辐射的电磁波的能量密度为

$$S = EH = \frac{\sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu^3} p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$$

振荡电偶极子于在单位时间内辐射出去的能量, 称为辐射功率, 用 P 表示. 对上式在以振荡电偶极子为中心半径为 r 的球面上积分, 并把所得结果取时间平均值, 则得振荡电偶极子的平均辐射功率为

$$\bar{P} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4}{12\pi u} \quad (14-18)$$

上式说明, 平均辐射功率与振荡电偶极子频率的四次方成正比. 因此, 振荡电偶极子的辐射功率随着频率的增高而迅速增大。

五、电磁波谱

自从赫兹用电磁振荡的方法产生电磁波, 并证明它的性质和光波的性质完全相同以后, 物理学家又做了许多实验, 不仅证明了光波是电磁波, 而且证明了后来发现

的 X 射线、 γ 射线都是电磁波,它们在真空中的传播速度都是 c ,并都具有电磁波的共同特性.电磁波的范围很广,为了便于比较,对各种电磁波有较全面的了解,我们可以按照波长(或频率)的大小,把它们依次排列成谱,称为电磁波谱,如图 14.10 所示.

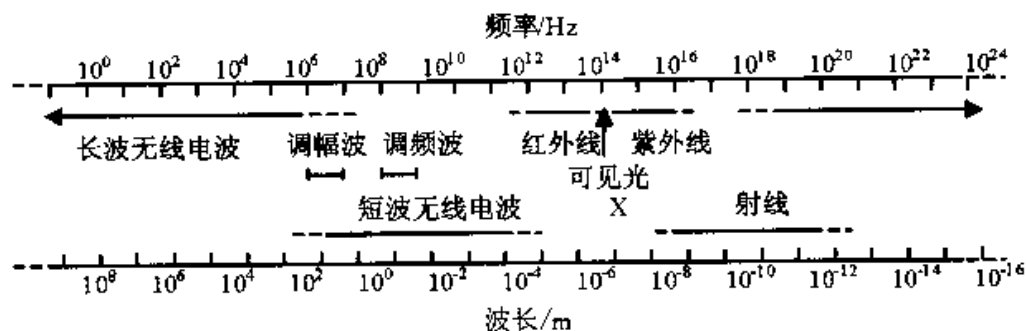


图 14.10 电磁波谱

在电磁波谱中,波长最长的是无线电波(有人已在地球表面上探测到频率 $\nu = 10^{-2}$ Hz 的电磁波,其周期约为 100s,波长是地球半径的 5000 倍),它又因波长的不同(从几千米到几毫米)而分为长波、中波、短波、超短波和微波等.长波在介质中传播时损耗很小,故常用于远距离通讯和导航;中波多用于航海和航空定向及无线电广播;短波多用于无线电广播、电报、通讯等;超短波、微波多用于电视、雷达、无线电导航以及其他专门用途.

红外线的波长在 $600\mu\text{m}$ 到 $0.76\mu\text{m}$ 之间,由于其处于可见红光的外侧,故称为红外线.它多用于红外雷达、红外照相和夜视仪上.因为红外线有显著的热效应(亦称为热波),所以可用来取暖,在工农业生产上常用作红外烘干等.波长在 760nm 到 400nm 之间的波,可为人眼所感知,称为可见光(一般简称为光波).波长在 400nm 到 5nm 之间的波称为紫外线,它能引起化学反应和荧光效应,在医学上常用来杀菌,农业上可用来诱杀害虫.红外线、可见光和紫外线这三部分电磁波合称为光辐射.

X 射线(亦称为伦琴射线)的波长在 5nm 到 0.04nm 之间,它的能量很大,具有很强的穿透能力,是医疗透视、检查金属部件内部损伤和分析物质晶体结构的有力工具.

波长最短的是 γ 射线,波长在 0.04nm 以下,其能量和穿透能力比 X 射线还大,可用来进行放射性试验,产生高能粒子,还可借助它研究天体、认识宇宙.

需要指出的是,电磁波谱中上述各波段主要是按照生产方式或探测方法的不同来划分的,随着科学技术的发展,不同方式产生的波会有一些共同的波段,从而出现不同波段相重叠的情形.

思考题

- 14-1 什么叫位移电流?其与传导电流有什么异同?
- 14-2 试从以下三个方面比较静电场与有旋电场:(1)产生的原因;(2)电场线的分布;(3)对导体中电荷的作用.
- 14-3 变化电场所产生的磁场,是否也一定随时间发生变化?变化的磁场产生的电场,是否也一定随时间发生变化?
- 14-4 在 LC 电磁振荡中,电场能量和磁场能量如何交替转换?
- 14-5 普通的 LC 振荡电路为什么不能用来有效地发射电磁波?要有效地把电磁能量发送出去,振荡电路必须具备哪些条件?
- 14-6 为什么说电磁波是横波?
- 14-7 什么是坡印廷矢量?
- 14-8 什么是电磁波谱?各种电磁波的特性有哪些?

习题

- 14-1 试证平行板电容器两极板之间的位移电流可写为
- $$I_d = C \frac{dU}{dt}$$
- 14-2 在一对巨大的圆形极板电容器($C = 1 \times 10^{-12} \text{F}$)上加一频率为 50Hz 、峰值为 $1.74 \times 10^5 \text{V}$ 的交变电压,试计算极板间位移电流的最大值.
- 14-3 设半径为 0.20m 的平行板电容器,两极板间为真空,极板间距离为 0.50cm ,以恒定电流 2.0A 对电容器充电.求位移电流密度(忽略平行极板电容器边缘效应,设电场是均匀的).
- 14-4 试证明麦克斯韦方程组中蕴含了电荷守恒定律.
- 14-5 半径 R 为 0.10m 的两块圆板构成的平行板电容器,放置于真空中,现对电容器匀速充电,使两极板间电场随时间的变化率为 $1.0 \times 10^{13} \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.求两极板间位移电流,并计算电容器内离两板中心连线为 r ($r < R$) 处以及 $r = R$ 处的磁感

强度.

14-6 用一个电容可在 10.0pF 到 360.0pF 范围内变化的电容器和一个自感线圈并联组成无线电收音机的调谐电路. (1) 求该调谐电路可以接收到的最大和最小频率之比; (2) 为了使调谐频率能在 $5.0 \times 10^5\text{Hz}$ 到 $1.5 \times 10^6\text{Hz}$ 的范围内, 需在原电容器上并联一个多大电容? 此电路选用的自感应为多少?

14-7 已知 LC 电路中的电场能量和磁场能量之和为一常量. 试由此导出 LC 电路的振荡方程.

14-8 一振荡偶极子辐射电磁波, 设偶极子的电矩振幅为 $p_0 = 2.26 \times 10^{-4}\text{C} \cdot \text{m}$, 频率为 800kHz . 求: (1) 电磁波的波长; (2) 偶极子的平均辐射功率; (3) 在偶极子赤道面上 ($\theta = \pi/2$) 距离偶极子 2km 处的平均辐射强度以及该处的电场强度和磁场强度振幅.

14-9 一振荡电路, 已知 $C = 0.025\mu\text{F}$, $L = 1.015\text{H}$, 电路中电阻可忽略不计, 电容器上电荷最大值为 $Q_0 = 2.5 \times 10^{-6}\text{C}$. (1) 写出电路接通后, 电容器两极板间的电势差随时间变化的方程和电路中电流随时间变化的方程; (2) 写出电场能量、磁场能量及总能量随时间变化的方程; (3) 求 $t_1 = T/8$ 和 $t_2 = T/4$ 时, 电容器两极板间的电势差、电路中的电流、电场能和磁场能.

14-10 有一根氦氖激光管, 它所发射的激光功率为 $1.0(10^{-2}\text{W})$, 设发出的激光为圆柱形光束, 圆柱截面的直径为 $2.0(10^{-3}\text{m})$. 试求激光的最大电场强度 E_0 和磁感强度 B_0 .

第 15 章 波动光学

光学是物理学中发展较早的一门基础学科. 人类对光的研究至少已有两千多年的历史, 世界上最早关于光学知识的文字记载, 见于我国的《墨经》(公元前 400 多年). 关于光人们最早观察和意识到的是光的直线传播、光的反射和光的折射等直观的现象, 此后, 以这些现象为依据, 大约在 17 世纪中叶建立了光的反射和折射定律, 奠定了几何光学的基础. 17 世纪和 18 世纪是光学发展史上的一个重要时期, 在这一时期, 科学家们不仅开始从实验上对光进行观测和研究, 而且也着手进行对已有光学知识的系统化和理论化. 17 世纪初, 李普希(H. Lippershey, 1570—1619, 荷兰物理学家)、伽利略(G. Galilei, 1564—1642, 意大利物理学家和天文学家) 和开普勒(J. Kepler, 1571—1630, 德国天体物理学家和数学家) 等人发明了用于天象观测的望远镜. 1621 年, 斯涅耳(W. Snell, 1591—1626, 荷兰数学家和物理学家) 发现了光线在穿过两种介质的界面时, 传播方向发生变化的折射定律, 不久, 笛卡尔(R. Descartes, 1596—1650, 法国数学家) 导出了用正弦函数表示的折射定律.

关于光的本性的认识一直是光学发展中争论的焦点. 早在 17 世纪, 关于光的本性问题有两派不同的学说. 一种学说是以牛顿(I. Newton, 1643—1727, 英国物理学家) 为代表的微粒说, 认为光是以一定速度在空间传播的微粒的集合. 应用光的微粒说理论能够解释光的直线传播、光的反射和光的折射等现象, 在解释光从空气进入水中的折射现象时, 认为光在水中的传播速度大于在空气中的传播速度. 另一种学说是以惠更斯(C. Huygens, 1629—1695, 荷兰物理学家) 为代表的光的波动说, 认为光是在介质中传播的一种波动. 光的波动说理论也能解释光的反射和折射等现象, 但在解释光在水中的折射时认为光在水中的传播速度小于在空气中的传播速度, 这一点与光的微粒说的结论正好相反. 另外, 光的波动说在解释光的直线传播时遇到了困难. 光的波动说虽然取得了一些成就, 但由于当时牛顿观点的权威性, 因而一直到 18 世纪光的微粒说始终占有主导地位. 此外, 由于当时人们还无法通过实验准确测定光在空气中和水中的传播速度, 因而无法根据实验事实去判断这两种学说的优劣.

19 世纪初,随着科学的发展和实验条件的改善,人们陆续发现了光的干涉、衍射、偏振等现象,这些现象和微粒说是不相容的,而应用光的波动说能够成功的解释这些现象.关于光在水和空气中传播的速度问题,直到牛顿提出微粒说 200 年之后的 1850 年,才分别由傅科(J. B. K. Foucault, 1819 - 1868, 法国实验物理学家)和斐索(A. H. L. Fizeau, 1819—1896, 法国物理学家)用实验的方法测出了光在水中的传播速度小于在空气中的传播速度,这些都成为了光的波动说的有力证据.至此,支持光的微粒说的人就很少了,光的波动说取得了决定性的胜利.

19 世纪中期,以麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879, 英国物理学家)为代表的科学家找到了光和电磁理论之间的联系,认为光是一种电磁波.到了 19 世纪末 20 世纪初,光学的研究深入到光的发生、光和物质相互作用的微观领域中.人们通过对一系列新现象如黑体辐射、光电效应、康普顿效应等现象的研究,使人们对光的本性的认识又向前推进了一步,确立了光是具有一定能量和动量的粒子所组成的粒子流,这种粒子称为光子.这里所说的光子不同于牛顿微粒说中的粒子,光子是和光的频率(波动特征)联系着的.光同时具有微粒和波动两种特性,光具有波粒二象性.

上世纪 50 年代以后,发现了激光,光学又取得了新的进展.光学出现了许多分支——光纤技术,激光全息技术,非线性光学,近代光学和量子光学等.

本章介绍波动光学,主要内容有:光的干涉、衍射及其应用,光栅和 X 射线的衍射,光的偏振现象等.

§ 15.1 光源 单色光 相干光

一、光源

能够发光的物体称为光源.光是一种电磁波,通常意义上的光是指可见光,即能引起人们视觉的电磁波.它的频率在 3.9×10^{14} Hz 到 7.5×10^{14} Hz 之间,相应地在真空中的波长在 760 nm 到 400 nm 之间.不同频率的可见光给人们以不同颜色的感觉,频率从大到小给出从紫到红的各种颜色.从发光机制来分,光源可分为普通光源和激光光源.普通光源按激发方式不同又可分为以下几种:(1)热光源——利用热能激发的光源.这种光源发射的光属于热辐射性质,如白炽灯、弧光灯等;(2)电致发光——由电能直接转化为光能.如气体放电管(霓虹灯)、半导体发光二极管等;(3)光致

发光——由光激发所引起的发光现象。如某些金属氧化物在紫外线照射下的受激发光、日光灯等；(4) 化学发光——由于化学反应而引起发光的现象。如萤火虫发光、磷在空气中被氧化而发光等。其中，利用电能、光能和化学能激发发光的光源又称为冷光源。

普通光源的发光是处于激发态的原子(或分子)的自发辐射形成的。按照现代物理学理论，原子(或分子)的能量只能处于一系列分立的能级上，能量处于最低能级的状态称为基态，处于其它较高能级的状态称为激发态。通常原子处于基态，基态是稳定态。当原子吸收外界能量处于激发态时，激发态极不稳定，原子在激发态上的平均寿命非常短，大约只有 $10^{-11} \sim 10^{-8}$ s，然后，原子就会自发地回到较低的能级上，在这一过程中，原子向外发射光波(电磁波)。原子从高能级向低能级跃迁的过程，即原子每次发光的过程所持续的时间很短，约为 10^{-8} s。可见，一个原子每次发出的光是一段频率一定、振动方向一定、长度($l = c\Delta t$)有限的光波，称为光波列。

图 15.1 是原子一个光波列示意图。一个原子跃迁发光后，只有再次获得能量处于激发态后才能再次跃迁发光，因此，原子的发光是间歇的、断续的。在普通光源中，有许许多多的原子在发光，这些原子所处的激发态可能各不相同，并且它们向低能级的跃迁是自发、随机进行的，因此，各原子的发光是相互独立的，即这些原子所发出的光波列在频率、振动方向、相位上相互独立，没有必然联系。

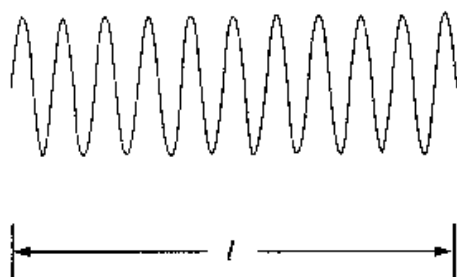


图 15.1 一个光波波列

二、单色光

具有单一频率的光波称为单色光。由于原子发光是间歇的、断续的，原子的一次发光持续的时间很短，所以，原子发射的光波是一段长度有限的波列。由傅里叶分析可知，一个长度有限的波列是许多频率不同的简谐波叠加的结果，因此，任何光源所发出的光波都有一定的频率范围，即波长范围，从这个意义上讲，严格的具有单一频率的单色光实际上是不存在的。通常所说的单色光都是含有一定频率范围的光，称为准单色光。准单色光中各种频率(或波长)的光所对应的强度是不同的，以光的波长(或频率)为横坐标，以光的强度为纵坐标，可表示波长与强度间的对应关系，称为光谱曲线(或谱线)。图 15.2 是以波长为 λ 的单色光为例的光谱曲线。设谱线中心处

的波长为 λ , 强度为 I_0 , 把强度为 $\frac{I_0}{2}$ 的两点间的波长范围 $\Delta\lambda$ 叫做谱线宽度. 用谱线宽度来衡量光的单色性的好坏, $\Delta\lambda$ 越小, 光的单色性就越好. 普通单色光源的谱线宽度的数量级为 $0.1 \sim 10^{-3}$ nm, 而激光的谱线宽度的数量级在 10^{-9} nm 甚至更小.

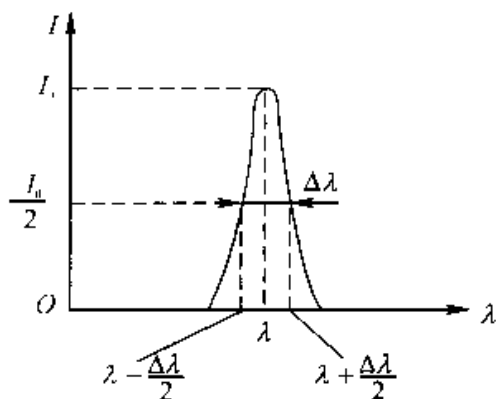


图 15.2 谱线及其宽度

三、相干光

由波的叠加原理可知, 由振动频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的两个波源所发出的波是相干波, 在相干波相遇的区域内, 空间有些点的振动始终加强, 而有些点的振动始终减弱或完全抵消, 即产生干涉现象. 机械波干涉的例子比较常见, 例如两个频率相同的音叉在房间里振动, 可以听到房间里有些空间点的声振动始终很强, 而另一些空间点的声振动始终很弱. 但对于光波, 就不容易观察到干涉现象, 如在室内放两个频率完全相同的单色钠光源(黄光), 在它们发出的光的叠加区域就观察不到光波始终加强或减弱的干涉现象, 这表明两个独立的光源即使频率相同, 也不能构成相干光源. 普通光源发出的光是由光源中的原子(或分子)发出的光波列组成的, 这些光波列之间没有固定的相位关系, 所以, 来自两个独立光源或同一光源不同部分发出的两列光波, 即使它们的振动频率相同, 振动方向相同, 但它们的相位差也不可能保持恒定, 不满足相干条件, 因而不能发生干涉现象. 那么, 两列光波满足怎样的条件才能发生干涉呢?

光波是电磁波, 满足波动的特征. 光波是空间传播着的交变的电磁场, 即是矢量 E 和 H 的传播. 在这两个矢量中, 对人的眼睛和感光仪器(如照相底片, 摄影仪等)起主要作用的是电场 E . 因此, 以后我们所提到光波中的振动矢量就是指 E 矢量, E 矢量被称为光矢量或电矢量.

设两列频率相同、振动方向相同的光波, 它们各自在空间某一点的光振动分别为

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

式中 E_{10} , E_{20} 和 φ_{10} , φ_{20} 分别是两分振动的振幅和初相位, 它们在相遇点叠加的合振动是

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中
$$E_0^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) \quad (15-1)$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{E_{10} \sin \varphi_{10} + E_{20} \sin \varphi_{20}}{E_{10} \cos \varphi_{10} + E_{20} \cos \varphi_{20}}$$

光强与振幅的平方成正比,由式(15-1)可知,在相位差 $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 为任意值的情况下,两分振动叠加时,合振动的光强并不等于分振动的光强之和.但实际观察到的总是较长时间内(与光振动周期 T 相比,可见光的 T 值约为 10^{-15} s)光的平均强度,即平均光强.

所以,在观察时间 τ 内

$$\begin{aligned} I &= \bar{E}_0^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E_0^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})] dt \\ &= E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) dt \end{aligned}$$

即
$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) dt \quad (15-2)$$

讨论:

(1) 如果两列同频率、同振动方向的单色光波是由两个独立的普通光源发出的,由于普通光源中原子(或分子)发光的间歇性和随机性,在观察时间 τ 内,两列光波的相位差也将随机的变化,并且等几率的分布在 0 和 2π 之间,因此有

$$\int_0^\tau \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) dt = 0$$

所以
$$I = I_1 + I_2 \quad (15-3)$$

由式(15-3)可以看出,在观察时间 τ 内合振动的光强等于两分光强之和,即在光的叠加区域不会出现亮度分布不均匀的干涉图样,这种情况称之为光的非相干叠加.两列光波虽然频率相同,振动方向相同,但并不是相干光.

(2) 如果两列光波来自于同一光源,并且相位差 $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 保持恒定,与时间无关,则

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) dt = \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

所以
$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) \quad (15-4)$$

由式(15-4)可知,合成后的光强不仅与分振动的光强 I_1 和 I_2 有关,还与两分振动的相位差($\varphi_{20} - \varphi_{10}$)有关.当两列光波在空间不同位置相遇时,其相位差($\varphi_{20} - \varphi_{10}$)将有不同的数值,即在两列光波的叠加区域,光强随空间位置的不同而不同,出现了明暗相间且有规律分布的干涉图样.这种情况称之为光的相干叠加,两列光波是相干光.我们把式(15-4)中 $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ 称为干涉项.当 $\Delta\varphi_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm 2k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, 在这些位置的光强最大,称为干涉相长;当 $\Delta\varphi_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm(2k+1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, 在这些位置的光强最小,称为干涉相消.

由以上讨论可知,两列光波叠加时发生干涉的条件是:振动频率相同,振动方向相同,相位相同或相位差恒定.满足这些干涉条件的光称为相干光,能够产生相干光的光源称为相干光源.

怎样才能获得相干光呢?要获得相干光,必须创造条件,使在任意时刻到达观察点的光是从同一光源上同一点发出,但经过不同路径的两列光波.各原子的发光在迅速的改变,但任何相位的改变总是同时在这两列光波中发生,所以它们到达空间同一位置时相位差总保持不变.通常把光源上同一点发出的光设法分成两部分,然后再把它们叠加起来,这样获得的两列光波满足振动频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的干涉条件,是相干光.用这种方式获得相干光的方法有两种:一种是分波阵面法,即从同一波阵面上取得的两部分光具有相同的相位,可作为相干光,如杨氏双缝、菲涅耳双镜、劳埃德镜干涉等;另一种获得相干光的方法是分振幅法,即当光射到两种介质的分界面时,分别取反射光和透射光作为相干光,如薄膜干涉等.

§ 15.2 光程和光程差

一、光程

在研究光的干涉时,光的相干叠加与非相干叠加的区别在于干涉项 $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})$, 而干涉项的大小主要取决于相位差($\varphi_{20} - \varphi_{10}$). 为了方便地研究相位关系,我们引入光程的概念.

单色光在不同的介质中传播时,其振动频率不变,而传播速度和波长将发生变

化. 设某种单色光振动的频率为 ν , 在真空中的光速为 c , 波长为 λ , 其在折射率为 n 的介质中传播时速度为 V , 波长为 λ_n , 则有

$$V = \frac{c}{n}$$

又

$$V = \lambda_n \nu$$

所以

$$\lambda_n = \frac{V}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda}{n}$$

上式表明, 在折射率为 n 的介质中光波的波长为真空中波长的 $\frac{1}{n}$. 在此介质中如果光波通过的几何路程为 r , 那么在相同的时间内光在真空中通过的几何路程为

$$\frac{r}{V} \cdot c = nr$$

即在相同的时间内, 如果光波在介质中通过的路程为 r , 则其在真空中通过的路程为 nr . 我们将光波在某一介质中通过的几何路程 r 与此介质的折射率 n 的乘积 nr 称为与路径 r 相应的光程. 引入光程的概念后, 我们就可以把光在各种介质中通过的路程都折算为光在真空中通过的路程, 以便于研究光在不同介质中的传播.

二、光程差

引入光程的概念之后, 我们来讨论光程与相干光相位差之间的关系.

为了使研究更具有普遍意义, 我们选取两相干光在不同的介质中传播后相遇的情况. 如图 15.3 所示, s_1 和 s_2 是频率为 ν 的相干光源, 设它们发出的光的初相位相同, 分别在折射率为 n_1 和 n_2 的均匀介质中传播, 在两种介质中所经历的几何路程分别为 r_1 和 r_2 , 则两相干光在相遇点 P 处的分振动分别为

$$E_1 = E_{10} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda_1} \right)$$

$$E_2 = E_{20} \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda_2} \right)$$

则两相干光在点 P 处的相位差为

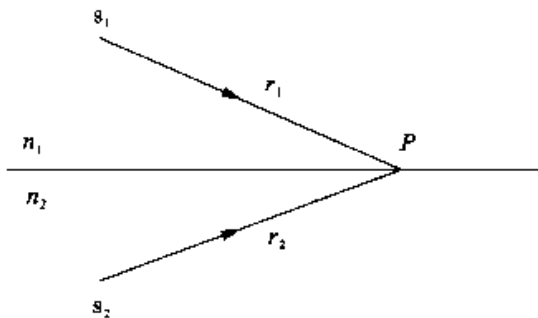


图 15.3 光程差的计算

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1}\right)$$

将光在两种介质中的传播都折算为在真空中的传播,则有

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{n_2 r_2}{\lambda} - \frac{n_1 r_1}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2 r_2 - n_1 r_1)$$

上式中, 2π 和 λ 均为常量, 相位差 $\Delta\varphi$ 决定于 $(n_2 r_2 - n_1 r_1)$, $n_2 r_2 - n_1 r_1$ 表示两相干光到达点 P 时的光程差, 常用 δ 表示. 可见, 相干光发生干涉时各处干涉加强和干涉减弱的情况取决于两相干光在该处的光程差, 而不是几何路程之差. 所以

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

即 相位差 = $\frac{2\pi}{\lambda} \times$ 光程差

式中 λ 为光在真空中的波长. 所以

(1) 当 $\delta = \pm k\lambda$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$, 干涉相长(最强).

(2) 当 $\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$, 干涉相消(最弱).

三、透镜不引起附加的光程差

在光学实验中, 经常要用到透镜, 透镜的厚度是不均匀的, 那么光通过透镜时会不会引起光程的变化呢? 实验表明, 平行光束通过透镜后, 会聚于透镜焦平面上成一亮点, 如图 15.4 所示, 平行光束波前上各点(如图中 A, B, C, D, E 各点)的相位相同, 到达焦平面上因干涉相长而得到一亮点, 说明各光线的相位仍然是相同的. 大量的类似实验都验证了光通过透镜时只改变光的传播情况, 而不会引起附加的光程差. 对此

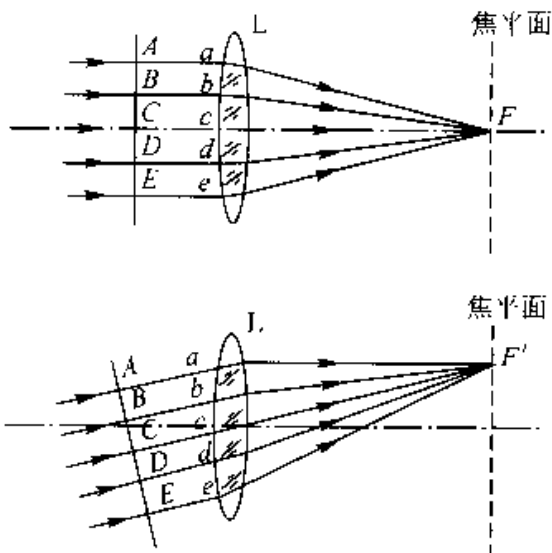


图 15.4 通过透镜的各光线的光程相等

问题可这样理解, 如图 15.4 所示, 虽然光通过路径 AaF 到达点 F 比光通过路径 CcF 到达点 F 的几何路程要长, 但路径 CcF 在透镜中经过的路程要比路径 AaF 相应的长一些, 由于透镜的折射率大于 1, 将路径 AaF 和路径 CcF 均折算成光程, 通过计算可

以证明两者的光程是相等的. 同理, B, C, D, E 各点到达点 F 时的光程也相等. 同理讨论也可知, 图中 AaF', BbF', \dots 的光程也相等. 所以, 使用透镜并不会引起附加的光程差.

§ 15.3 分波阵面干涉

如前所述, 分波阵面法是获得相干光的方法之一. 由于从光源发出的同一波阵面上各点的振动具有相同的相位, 所以从同一波阵面上取出的两部分可以作为相干光源. 本节将要介绍的杨氏双缝、双镜和劳埃德镜等光的干涉实验中的相干光, 都是用分波阵面法得到的.

一、杨氏双缝干涉

1. 杨氏双缝干涉实验

1801 年托马斯·杨 (T. Young, 1773-1829, 英国物理学家) 首次利用单一光源获得两列相干光波, 观察到了光的干涉现象, 并且用光的波动性成功解释了光的干涉现象, 从而进一步证实了光的波动理论.

如图 15.5 所示, 在普通单色光源后放置一狭缝 S , S 相当于一个单色线光源, S 后放有与 S 平行且等距离的两平行狭缝 S_1 和 S_2 , S_1 和 S_2 间的距离很小, 在远处放一平行的接收屏 P . 由惠更斯原理分析可知, S_1 和 S_2 位于由 S 发出的光波的同一波阵面上, 所以相位关系恒定, 满足相干条件, S_1 和 S_2 是相干光源, 所以在 S_1 和 S_2 发出的光的叠加区域, 产生干涉现象, 即在接收屏 P 上出现了一系列稳定的明暗相间的干涉条纹, 这些条纹与狭缝平行, 且条纹间距离相等. 这个实验称杨氏双缝干涉实验, 实验中相干光源 S_1 和 S_2 都是从同一光源 S 的同一波阵面上取出的两部分, 所以把这种方法称为分波阵面干涉.

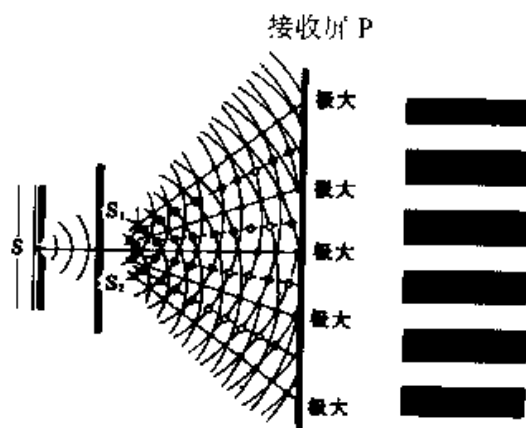


图 15.5 杨氏双缝干涉

2. 干涉明暗条纹的位置

现在我们对接收屏上干涉条纹的位置做定量分析. 如图 15.6 所示, 设 S_1 和 S_2 之间距离为 d , 从 S_1 到接收屏 P 的垂直距离为 D , Q 为屏上任意一点, 点 Q 距 S_1 和 S_2 的距离分别为 r_1 和 r_2 , 点 Q 到屏上对称中心点 O 的距离为 x . 则从 S_1 和 S_2 发出的光到达点 Q 的光程差为

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

通常情况下, d 很小而 D 较大, 因此 θ 很小, 则

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{D}$$

所以光程差可表示为

$$\delta = \frac{xd}{D}$$

由于 S_1 和 S_2 是单色光源 S 发出的同一波阵面的两部分, 所以 S_1 和 S_2 的相位相同. 由前述知识可得, 当

$$\delta = \frac{xd}{D} = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

即在接收屏上 $x = \pm k \frac{D\lambda}{d}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (15-5)

的地方, 干涉加强, 点 Q 处为明条纹. 相对应于 $k = 0$ 的明条纹称为零级明条纹或中央明条纹, 相对应于 $k = 1, k = 2, \dots$ 的明条纹分别称为第一级, 第二级 \dots 明条纹. 式(15-5)中正负号表明干涉明条纹在中央明纹两侧对称分布, x 表示各级明条纹的中心位置.

当 $\delta = \frac{xd}{D} = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

即, $x = \pm (2k+1) \frac{D\lambda}{2d}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (15-6)

时, 点 Q 处为暗条纹. 式(15-6)表示各级暗条纹的中心位置, 它们也对称分布在中央明条纹两侧. 若由 S_1 和 S_2 发出的光到点 Q 的光程差既不满足式(15-5), 也不满

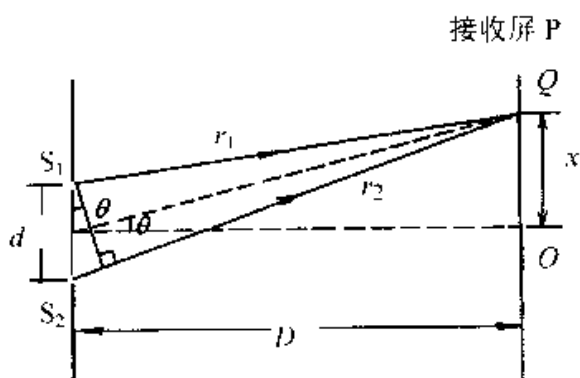


图 15.6 双缝干涉条纹的计算

足式(15-6),则点Q处既不是最明,也不是最暗.由式(15-5)和(15-6)可以看出,两相邻明条纹或相邻暗条纹的间距都是

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d}$$

说明干涉条纹是等间距分布的.另外,若已知 d 和 D ,测出 Δx ,则可由上式计算出入射单色光的波长 λ .还可看出,若 d 和 D 的值一定,相邻明条纹(相邻暗条纹)间的距离 Δx 与入射光的波长成正比,波长越小,条纹间距就越小.因而,若用自然光(复色光)作为光源时,则干涉结果是在中央明条纹(白色)两侧其它各级明条纹的位置,由于波长的不同而逐级拉开距离,从而出现由紫到红的彩色条纹,并且出现了各种颜色级次稍高的条纹将发生重叠,以致模糊一片而分不清条纹的现象.

例 15-1 利用杨氏双缝干涉装置测量物质的折射率.用一厚度 $d = 1 \text{ mm}$ 的透明薄膜覆盖在杨氏双缝装置中的一条狭缝上,这时接收屏上的中央明条纹落到了原第20级明条纹的位置上.如果入射光的波长为 600 nm ,求透明薄膜的折射率(设空气的折射率为1.0).

解 当用透明薄膜覆盖双缝干涉装置中的一条狭缝时,因为薄膜的折射率与空气的不同,则由此缝发出的光到达O(设接收屏的对称中心即原中央明条纹中心处为O)处的光程要发生变化,所以中央明条纹的位置发生相应的移动.如明条纹移动了 N 条,则O处就成为第 N 级明条纹.

从双缝到达O处的光程差为

$$\delta = n_2 d - n_1 d$$

式中 n_2 和 n_1 分别为薄膜和空气的折射率,根据双缝干涉明条纹条件得

$$\delta = (n_2 - n_1)d = N\lambda$$

所以透明薄膜的折射率为

$$n_2 = n_1 + \frac{N\lambda}{d} = 1 + \frac{20 \times 600 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-3}} = 1.012$$

例 15-2 用白光做光源观察双缝干涉.设狭缝间距离为 d ,试求能观察到的清晰可见光谱的级次.

解 白光波长在 $400 \text{ nm} - 760 \text{ nm}$ 范围,明条纹条件为

$$d \sin \theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

在 $\theta = 0$ 处,各种波长的光的光程差均为零,所以各种波长的零级条纹在接收屏上 $x = 0$ 处重叠,形成中央白色明纹.

在中央明纹两侧,各种波长的同一级次的明条纹,由于波长不同而在接收屏上的位置也不同,因而彼此错开,并产生不同级次条纹的重叠.在重叠区域内,靠近中央明纹的两侧,观察到的是由各种色光形成的彩色条纹,再远处则各色光重叠的结果形成一片白色,看不到条纹.

最先发生重叠的是某一级次的红光(设波长为 λ_h)和高一级次的紫光(设波长为 λ_v),因此,能观察到的从紫到红清晰可见的光谱的级次可由下式求得

$$k\lambda_h = (k+1)\lambda_v$$

因而有

$$k = \frac{\lambda_v}{\lambda_h - \lambda_v} = \frac{400}{760 - 400} = 1.11$$

由于 k 只能取整数,所以计算结果表明,从紫到红排列清晰的可见光谱只能是正负各一级,如图 15.7 所示.

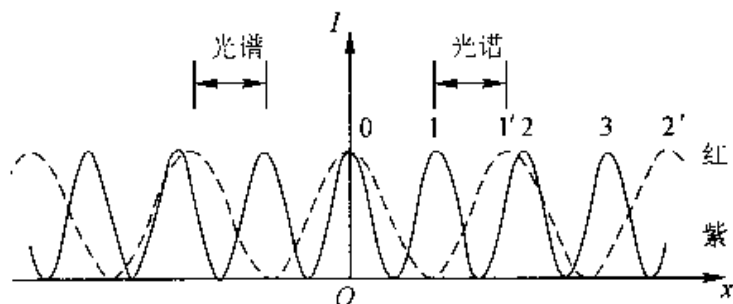


图 15.7 例 15.2 中白光干涉条纹强度分布

3. 杨氏双缝干涉的光强分布

将图 15.6 中由狭缝 S_1 和 S_2 发出的光波单独到达接收屏上点 Q 处的光振动的振幅分别设为 E_1 和 E_2 ,对应的光强分别为 I_1 和 I_2 ,根据式(15-1)可得,在点 Q 处两光波叠加后的合振幅为

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

由相位差与光程差的关系

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

得两光波在点 Q 处叠加后的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)$$

为简单起见,设 $E_1 = E_2 = E_0$,则 $I_1 = I_2 = I_0$,故有

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) = 4I_0 \cos^2 \left(\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

由上式可知,在满足 $\delta = \pm k\lambda$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的地方,光强 $I = 4I_0$,这些地方是明条纹的最亮处. 而对应于 $\delta \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的各处,光强 $I = 0$,这些地方是暗条纹的最暗处. 杨氏双缝干涉条纹的光强分布如图 15.8 所示. 由图可看出,光的总能量是守恒的,干涉条纹的出现只不过是光的干涉使得光的能量在空间进行了重新分布而已.

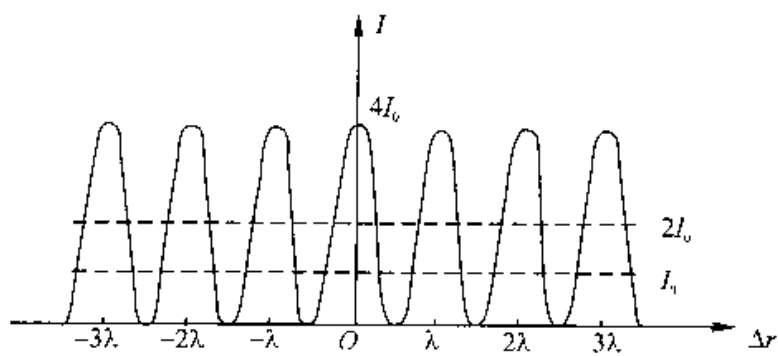


图 15.8 杨氏双缝干涉光强分布

二、菲涅耳双镜

杨氏双缝干涉装置中狭缝的宽度很小时,在接收屏上才能出现清晰的干涉条纹,但此时通过狭缝的光较弱,所以干涉条纹不够明亮,而且狭缝很小时它们的边缘往往对实验产生影响而使问题复杂化. 1818年,菲涅耳(A. J. Fresnel, 1788—1827, 法国物理学家)提出了另一种分波振面获得相干光的方法,可以在更为简单的情况下观察到干涉现象.

如图 15.9 所示, M_1 和 M_2 是两个紧靠在一起且夹角很小的平面镜, C 是两平面镜的交线,为使从狭缝光源 S 发出的光不直接照射到接收屏 P 上,可用一遮光板 L 将 S 和 P 隔开. S 发出的光经平面镜 M_1 和 M_2 反射后,分成沿不同方向传播的两部分,这两部分光如同从两虚光源 S_1 和 S_2 发出的一样,实际上它们都是从同一光源 S 发出的,满足相干条件. 可以看出,菲涅耳双镜干涉与杨氏双缝干涉是类似的.

两平面镜镜面之间的夹角为 θ ,可以证得 $\angle S_1CS_2 = 2\theta$,根据杨氏双缝干涉已求得计算公式,可得菲涅耳双镜干涉条纹中相邻明纹(或相邻暗纹)之间的距离为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{D\lambda}{2r\sin\theta} \quad (15-7)$$

式中 r 是 C 到光源 S 的距离(图中 S, S_1 和 S_2 在以 C 点为圆心的同一圆周上).

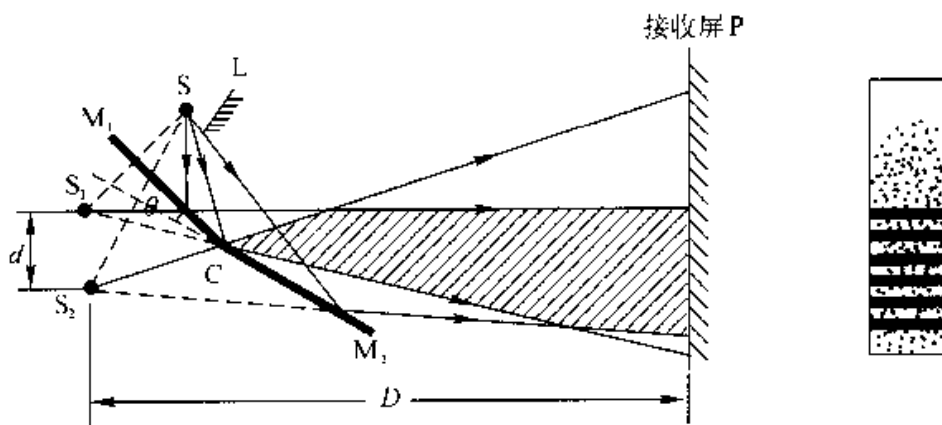


图 15.9 菲涅耳双镜干涉

例 15-3 在菲涅耳双镜实验中,单色光源 S 的波长为 500 nm , S 与双镜交线 C 的距离为 10 cm , C 与接收屏 P 的距离为 2 m , 已知双镜的夹角为 $8'$, 求

(1) 接收屏上两相邻明条纹之间的距离.

(2) 若双镜夹角扩大为 $10'$, 则接收屏上两相邻明条纹的间距有何变化.

解 (1) 由式(15-7)及题意可得,接收屏上两相邻明条纹之间的距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{D\lambda}{2r\sin\theta} \\ &= \frac{(10 \times 10^{-2} + 2) \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 10 \times 10^{-2} \times \sin 8'} = 2.3 \text{ mm} \end{aligned}$$

(2) 当双镜夹角 θ 变为 $10'$ 时,接收屏上两相邻明条纹之间的距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{D\lambda}{2r\sin\theta'} \\ &= \frac{(10 \times 10^{-2} + 2) \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times 10 \times 10^{-2} \times \sin 10'} = 1.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

由计算可知,随着双镜夹角的增大(相当于两虚光源间的距离增大),接收屏上相邻明条纹间的距离将变小.

三、劳埃德镜

1834年,劳埃德(H. Lloyd)提出了另一种观察干涉现象的装置.

如图 15.10 所示,狭缝光源 S_1 为单色光源,它发出的光的一部分(图中 a 表示的

光)直接照射到接收屏 P 上;另一部分掠射(入射角很大,接近 90°)到一块下面涂黑(减少折射)的平玻璃板 M 上,经其反射后(图中 b 表示的光)也照射到接收屏 P 上.由 M 反射的光可看成是从 S_1 的虚像 S_2 发出的,它和 S_1 直接照射到屏上的光是分波阵面得到的,是相干光, S_1 和 S_2 构成了相干光源.有关劳埃德镜干涉条纹计算的原理和杨氏双缝干涉相同.

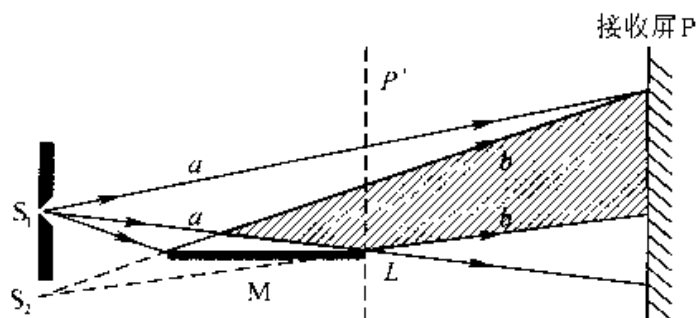


图 15.10 劳埃德镜干涉

但是,在劳埃德镜干涉实验中发现了另一现象,即如果把接收屏 P 平移到和平面镜 M 镜面边缘 L 相接触(图中 $P'L$ 位置),则在接触点应为明条纹的地方,实际却出现了暗条纹,其它的条纹也有相应的变化.只所以说在接触点 L 处应出现明条纹,是因为直观来看此时从 S_1 、 S_2 发出的相干光到达接触点 L 的光程是相等的,而在接触点实际出现暗条纹这一事实,说明了这一变化是光在反射过程中引起的,因为光在均匀介质中传播时,将不会引起以上变化.反射在介质表面上发生,因此光波的振动必然在这里使相位突然改变了 π ,即相当于反射光的光程在介质表面反射时损失了半个波长,这种现象称为半波损失.由于半波损失的存在,在劳埃德镜干涉的相关计算中,光程差的表达式将发生变化,其余则与前面讨论过的杨氏双缝干涉中的相同.所以说,劳埃德镜干涉实验不但显示了光的干涉,而且说明了光的半波损失.进一步的实验表明:光从光疏介质(相对而言光速较大或折射率较小的介质)射到光密介质(相对而言光速较小或折射率较大的介质)在两种介质的界面反射时,反射光的相位较入射光的相位有 π 的突变,相位的突变导致反射光的光程在反射过程中有半个波长的损失,即为半波损失.以后,遇到光的反射时要注意是否有半波损失,如果存在,在计算光程差时必须加以考虑.

例 15-4 如图 15.11 所示,湖面上 $h = 0.5 \text{ m}$ 处有一电磁波接收器位于 C 处,当一射电星从地平线渐渐升起时,电磁波接收器断续地检测到了一系列电磁波信号的极大值.已知射电星所发出的电磁波的波长为 20 cm ,试求第一次测到信号极大

时,射电星的方位与湖面所成的角度.

解 分析可知,电磁波接收器所测得的电磁波是射电星发出的信号直接到达接收器的部分和经湖面反射的部分相互干涉叠加的结果,可用类似于劳埃德镜干涉的方法分析和计算.

如题图所示,设射电星所在位置与湖面成 α 角,电磁波接收器所接收信号的反射波(图中用 b' 表示)与入射波(图中用 a 表示)间的夹角为 2α .若信号在湖面上的反射点为 A ,由图可知 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$,则两相干信号波到达接收器的波程差为

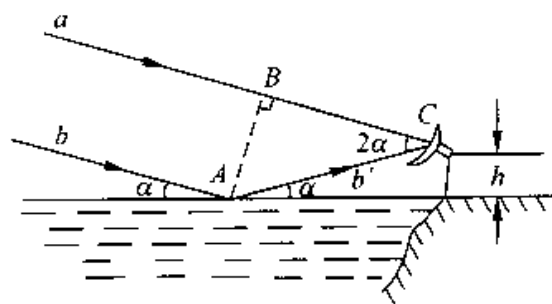


图 15.11

$$\begin{aligned} \delta &= \overline{AC} - \overline{BC} + \frac{\lambda}{2} \\ &= \overline{AC}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

式中 λ 为电磁波信号的波长, $\frac{\lambda}{2}$ 项是由于电磁波信号在湖面上反射发生相位突变而附加的波程差.接收器接收到信号的极大值时,两相干信号到达接收器的波程差应满足

$$\frac{h}{\sin\alpha}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

解得

$$\sin\alpha = \frac{(2k-1)\lambda}{4h}$$

第一次测到信号的极大值,即 $k=1$,此时射电星与湖面的夹角 α_1 为

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\lambda}{4h} = \arcsin \frac{20 \times 10^{-2}}{4 \times 0.5} = 5.74^\circ$$

§ 15.4 分振幅干涉

上一节通过介绍杨氏双缝干涉等分析了分波阵面干涉,这一节我们讨论另一种获得相干光的方法,即分振幅法.光照射到透明薄膜时,经薄膜上下表面反射后能产生干涉现象,如阳光照射下的肥皂膜、水面上的油膜、许多昆虫的翅膀呈现彩色花纹等.这种情况下,由于反射光和透射光的能量都是由入射光的能量分出来的,可以认

为人射光的振幅被分成若干部分,这种获得相干光的方法称为分振幅法。

一、薄膜干涉

1. 等倾干涉

如图 15.12 所示,均匀平面薄膜的厚度为 e ,折射率为 n_2 ,为使讨论具有普遍意义,设薄膜上、下方介质的折射率相互独立,分别为 n_1 和 n_3 。一单色光照射到薄膜上,入射角为 i ,在入射点 A 处,一部分光发生反射,另一部分光折射进入薄膜内,这一部分光在薄膜下表面 C 处又分成两部分,一部分光折射后射出薄膜,另一部分光反射后到达薄膜的上表面 B 处,到达点 B 处的光又分为两部分……可以看出,折射进入薄膜的光线经一次、三次、五次……反射后都能折出薄膜的上方,但是经过多次折射、反射后光的能量损失较大,其光强迅速下降,因此我们一般只考虑如图 15.12 所示的 a 、 b 两条光线的干涉。光线 a 和 b 是两条平行光线,加上透镜 L 并在其焦平面上放置接收屏 P 就可以观察到清晰的干涉图样。

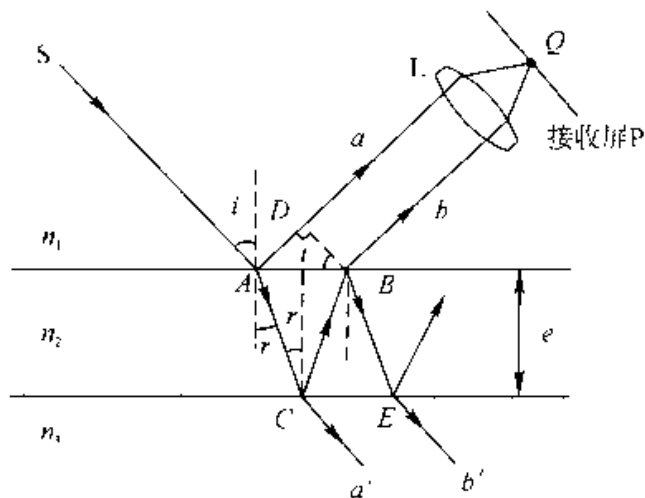


图 15.12 薄膜干涉

现在我们来计算两相干光线 a 和 b 在接收屏上 Q 点相遇时的光程差。如图 15.12 所示,从点 B 做光线 a 的垂线 BD ,由于透镜不引起附加的光程差,所以, a 、 b 两条光线从 B 到 Q 和从 D 到 Q 的光程相等,也就是说,在入射点 A 以前和 B 、 D 两点之后, a 、 b 两条光线的光程是相等的,这两条光线到达 Q 处的光程差是在由 A 到 D 及由 A 经 C 到 B 的过程中形成的。所以光线 a 和 b 之间的光程差为

$$\delta = n_2(\overline{AC} + \overline{CB}) - n_1 \overline{AD} + \delta'$$

式中 δ' 是半波损失项. 在图 15.12 中, γ 是折射角, 由折射定律得

$$n_2 \sin \gamma = n_1 \sin i$$

且 $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{e}{\cos \gamma}$, $\overline{AD} = \overline{AB} \sin i = 2e \tan \gamma \cdot \sin i$

则
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2n_2 e}{\cos \gamma} (1 - \sin^2 \gamma) + \delta' = 2n_2 e \cos \gamma + \delta' \\ &= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' \end{aligned} \quad (15-8)$$

于是可得到反射光的干涉条件为

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \text{明条纹} \quad (15-9)$$

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta' = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{暗条纹} \quad (15-10)$$

当入射光垂直入射 ($i = 0^\circ$) 时, 干涉条件为

$$\delta = 2en_2 + \delta' = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{明条纹} \quad (15-11)$$

$$\delta = 2en_2 + \delta' = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗条纹} \quad (15-12)$$

关于半波损失项 δ' 的讨论:

(1) $n_1 > n_2 > n_3$ 或 $n_1 < n_2 < n_3$.

光从光疏介质入射到光密介质在界面反射时, 反射光有相位 π 的突变, 即有半波损失. $n_1 > n_2$. 光线 a 由光密介质入射到光疏介质并在界面上 A 处反射, 因而无半波损失. $n_2 > n_3$. 光线 b 也是由光密介质入射到光疏介质并在界面上 C 处反射, 因而也无半波损失. 所以, 当 $n_1 > n_2 > n_3$ 时半波损失项 $\delta' = 0$; 若 $n_1 < n_2$, 光线 a 存在半波损失, $n_2 < n_3$, 光线 b 也存在半波损失, 两者恰好相互抵消, 所以, 在 $n_1 < n_2 < n_3$ 的条件下, 也有 $\delta' = 0$.

(2) $n_1 < n_2 > n_3$ 或 $n_1 > n_2 < n_3$.

当 $n_1 < n_2$ 时, 光线 a 在 A 处反射存在半波损失. $n_2 > n_3$, 光线 b 在 C 处反射无半波损失, 所以, 当 $n_1 < n_2 > n_3$ 时, 半波损失项 $\delta' = \frac{\lambda}{2}$; 同理分析可得, 当 $n_1 > n_2$

$< n_3$ 时, $\delta' = \frac{\lambda}{2}$. 故

$$\delta' = \begin{cases} 0 & n_1 > n_2 > n_3, \quad n_1 < n_2 < n_3 \\ \frac{\lambda}{2} & n_1 < n_2 > n_3, \quad n_1 > n_2 < n_3 \end{cases} \quad (15-13)$$

对于透射光也有干涉现象. 在图 15.12 中, 与讨论反射光干涉的情况相类似, 透射光线 a' 和 b' 是两相干光, 同理论可得它们的光程差为

$$\delta_T = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta''$$

式中 $\delta'' = \frac{\lambda}{2} - \delta'$, 即若反射光干涉存在半波损失, 则相应透射光干涉就无半波损失; 若反射光干涉无半波损失, 则相应透射光干涉就存在半波损失(关于 δ'' 项, 读者可假设 n_1, n_2 和 n_3 各种不同关系讨论). 说明反射光干涉相互加强时, 相应的透射光干涉就相互减弱, 反之亦然. 这种现象是符合能量守恒定律的.

从式(15-8)可看出, 对于厚度均匀的薄膜, 相干光的光程差决定于入射光线的入射角 i . 具有相同倾角的入射光经薄膜的上、下表面反射后产生的相干光到达相遇点时, 有相同的光程差, 因而它们干涉相长或干涉相消的情况是一样的, 处于同一条干涉条纹上. 也就是说, 处于同一条干涉条纹上的各个光点是由从光源到薄膜相同倾角的入射光形成的. 将这类干涉称为等倾干涉.

实际上用来观察等倾干涉的装置如图 15.13(a) 所示, 图中 M 是半透半反射平面镜, 与透镜 L 的主光轴成 45° 角放置. 从面光源 S 发出的光射到平面镜 M 上时, 一部分光被反射到薄膜上, 经薄膜上、下表面反射后透过 M 经透镜 L 会聚到位于其焦平面上的接收屏 P . 由图可看到, 从光源 S 上某一点发出的诸多光线中, 能以相同入射角射向薄膜表面的光处在同一圆锥面上, 它们经薄膜上、下表面反射形成的反射光经透镜会聚后将在接收屏 P 上形成一个圆形条纹. 诸光中不同入射角的光在接收屏上形成不同的圆形条纹. 而从光源 S 上不同发光点发出的具有相同倾角的光, 它们经薄膜的反射光也都会聚在接收屏上同一个圆形条纹上. 所以说, 等倾干涉条纹的位置只与形成它的光束的入射角有关, 而与光源的位置无关. 光源上的每一发光点都给出自己的一组干涉圆环, 并且, 来自不同发光点但有相同倾角的光所形成的干涉环之间又彼此进行非相干叠加, 使得干涉条纹更加明亮. 这也是实验中常采用扩展面光源的原因.

由产生等倾干涉明条纹和暗条纹的条件可知, 薄膜的厚度 e 一定时, 入射角 i 越大, 光程差 δ 越小, 干涉条纹的级 k 就越低, 在等倾干涉环纹中对应的圆环半径就越大. 所以, 干涉环中心处的干涉级最高, 等倾干涉环纹的干涉级从中心向边缘依次降低. 实验中观察到的等倾干涉环纹如图 15.13(b) 所示, 中央环纹间的距离较大, 向外环纹间距离逐渐变小, 即入射角越小, 环纹越疏, 入射角越大, 环纹越密. 此外, 环纹之间的距离与薄膜厚度 e 有关, 当 e 增大时, 相邻环纹之间的距离就越小, 环纹越

来越密,同一视场中看到的环数将越来越多。

以上讨论的是单色光的干涉情况,若入射光是复色光,显然干涉图样是彩色的。

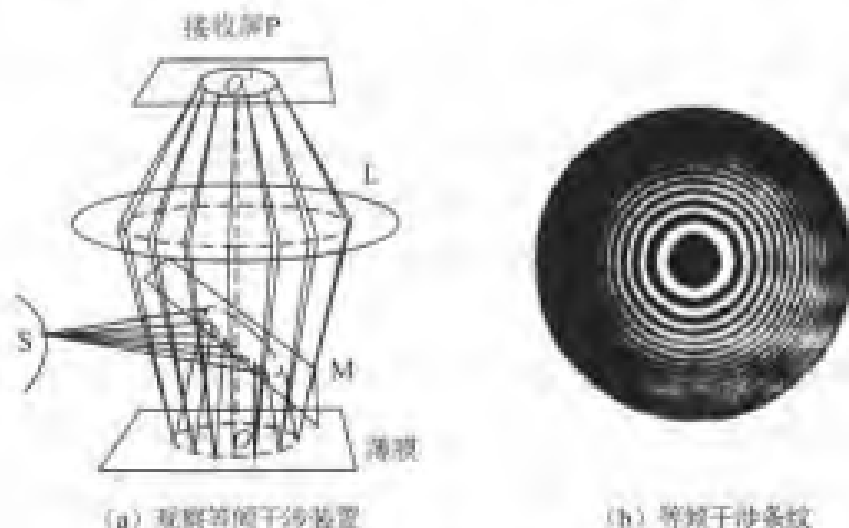


图 15.13 等倾干涉

2. 增透膜和高反膜

作为等倾干涉的应用,我们来简要分析增透膜和高反膜的原理。

利用薄膜干涉不仅可以测量入射光的波长或薄膜的厚度,而且还可以提高或降低光学器件的透射率。在实际的光学仪器系统中,由于反射的存在而使光的能量有较大的损失,例如,采用组合透镜的光学系统,因反射而损失的光能量将占入射光能量的较大比例。为减少入射光能量在透镜表面上反射所引起的光能损失,人们常在镜面上镀一层厚度均匀且严格控制的透明薄膜,常用的薄膜材料如氟化镁(MgF_2),它的折射率为 1.38,介于玻璃和空气的折射率之间,利用薄膜的干涉可使反射减少而增加透射,这种能减少反射而增加透射光强的薄膜称为增透膜或减反膜。最简单的单层增透膜如图 15.14 所示,设所镀氟化镁薄膜的厚度为 e ,由于 $n_1 < n_2 < n_3$,因此在氟化镁薄膜上,下界面的反射相干光 a 和 b 不再计入附加的光程差,因而可得相干光 a 和 b 的光程差为 $\delta = 2n_2e$,相干光 a 和 b 干涉相消时满足

$$2n_2e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

薄膜的最小厚度(相对于 $k=0$)为

$$e = \frac{\lambda}{4n_2}$$

如所镀氟化镁薄膜的厚度 $e = 0.1 \mu\text{m}$, 则对应的光程差为

$$\delta = 2n_2e = 2 \times 1.38 \times 0.1 \times 10^3 = 276 \text{ nm}$$

为 552 nm 的一半. 这种情况下, 氟化镁薄膜对波长为 552 nm 的黄绿光在薄膜的两界面上反射时, 由于干涉减弱而无反射光. 根据能量守恒定律, 此种波长的反射光减少, 相应的透射光就增强了.

在镀膜工艺中, 常把 n_2e 称为薄膜的光学厚度. 制备薄膜时控制膜厚 e , 使膜的光学厚度等于入射光波长的四分之一, 则该入射光就由于干涉减弱而无反射, 相应的增强了其透射.

有些光学器件则需要减小其透射率, 以增强反射光的强度, 这样的薄膜称为高反膜或增反膜. 在图 15.14 中, 若使 $n_1 < n_2 > n_3$, 这时仅薄膜上表面的反射光 a 有半波损失, 因而反射光由于干涉相长而增强, 反射光增强了, 相应的透射光就减弱了.

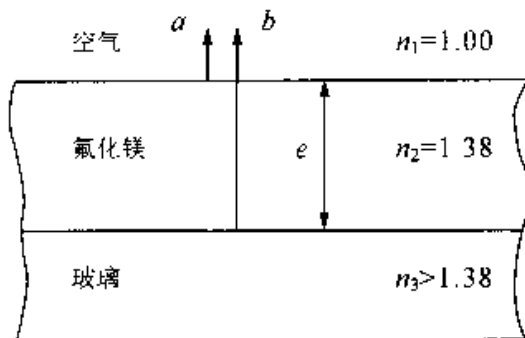


图 15.14 增透膜

如要进一步提高某种光的反射率或透射率, 可相应的采用镀多层膜的方法加以实现.

例 15-5 照相机的镜头表面通常镀一层类似 MgF_2 ($n = 1.38$) 的透明薄膜, 目的是为了利用干涉降低玻璃表面的反射. 为了使透镜对波长为 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的光反射最小, 薄膜的厚度应为多少? (玻璃的折射率为 1.5 , 空气的折射率取 1.0)

解 由于 MgF_2 的折射率介于空气和玻璃折射率之间, 入射光在其上、下表面反射时都存在半波损失, 因而相互抵消, 所以反射最小时有

$$\delta = 2ne = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

所以

$$e = \frac{(2k + 1)\lambda}{4n}$$

$k = 0$ 时, 薄膜厚度取最小值, 即

$$e = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550}{4 \times 1.38} = 99.6 \text{ nm} = 9.96 \times 10^{-2} \mu\text{m}$$

例 15-6 一油轮漏出的油 (折射率 $n_1 = 1.20$) 污染了某海域, 在海水 ($n_2 = 1.30$) 表面形成一层薄薄的油污.

(1) 如果太阳正位于该海域上空, 一直升飞机的驾驶员从机上向下观察, 他所正

对的油层厚度为 460 nm, 则他将观察到油层呈什么颜色?

(2) 如果一潜水员潜入该区域水下, 他又将观察到油层呈什么颜色?

解 这是一个油膜干涉问题, 太阳光垂直照射在海面上, 驾驶员和潜水员所看到的分别是反射光的干涉结果和透射光的干涉结果.

(1) 由于油层的折射率 n_1 小于海水的折射率 n_2 , 但大于空气的折射率, 所以在油层上、下表面反射的太阳光均发生相位突变, 因而两反射光之间的光程差为

$$\delta = 2n_1e$$

当 $\delta = k\lambda$, 即 $\lambda = \frac{2n_1e}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 时, 反射光干涉加强.

将 $n_1 = 1.20$, $e = 460 \text{ nm}$ 代入上式, 可得干涉加强的光波波长为

$$k = 1, \lambda_1 = 2n_1e = 1104 \text{ nm},$$

$$k = 2, \lambda_2 = n_1e = 552 \text{ nm}$$

$$k = 3, \lambda_3 = \frac{2}{3}n_1e = 368 \text{ nm}$$

.....

其中, 波长为 $\lambda = 552 \text{ nm}$ 的绿光在可见光范围内, 而 λ_1 和 λ_2 则分别在红外线和紫外线的波长范围内, 所以, 驾驶员将看到油膜呈绿色.

(2) 同理讨论可得, 透射光的光程差为

$$\delta = 2n_1e + \frac{\lambda}{2}$$

由

$$\delta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

可得

$$k = 1, \lambda_1 = \frac{2n_1e}{1 - \frac{1}{2}} = 2208 \text{ nm}$$

$$k = 2, \lambda_2 = \frac{2n_1e}{2 - \frac{1}{2}} = 736 \text{ nm}$$

$$k = 3, \lambda_3 = \frac{2n_1e}{3 - \frac{1}{2}} = 441.6 \text{ nm}$$

$$k = 4, \lambda_4 = \frac{2n_1e}{4 - \frac{1}{2}} = 315.4 \text{ nm}$$

.....

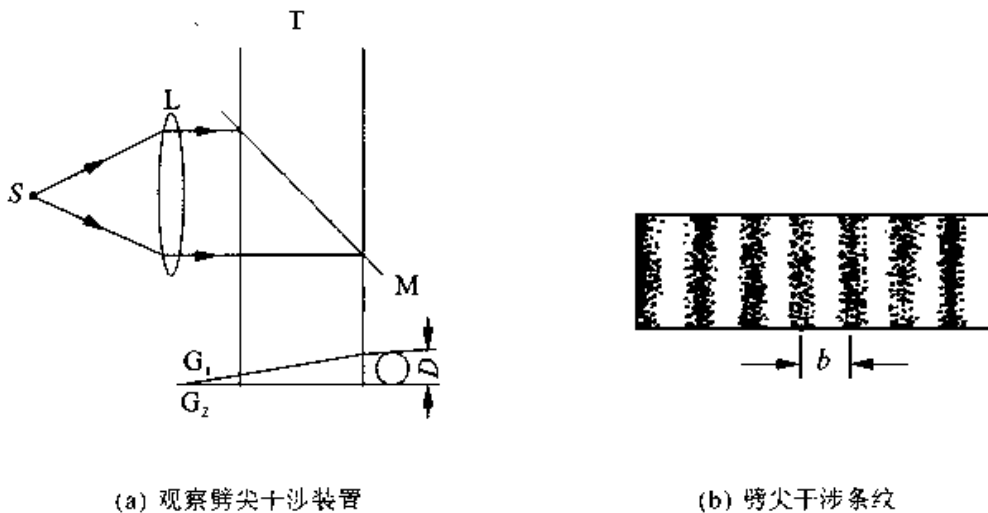
其中波长为 $\lambda_2 = 736 \text{ nm}$ 的红光和 $\lambda_3 = 441.6 \text{ nm}$ 的紫光在可见光范围内, 而 λ_1 是红外线, λ_4 是紫外线. 所以, 潜水员看到的油膜呈紫红色.

3. 等厚干涉

在薄膜的等倾干涉中, 我们研究了用扩展的面光源照射厚度均匀的薄膜时的干涉现象. 如果薄膜的厚度不均匀, 我们用一束入射角一定的平行光照射薄膜时, 它的上、下表面的反射相干光的光程差仅与薄膜的厚度有关, 即薄膜厚度相同的地方, 相干光的光程相同, 因而干涉结果对应于同一条干涉条纹, 将这种干涉条纹称为等厚干涉条纹. 等厚干涉条纹的形状取决于薄膜层厚度的分布情况. 我们用观察等厚干涉的常用装置劈尖和牛顿环对薄膜的等厚干涉进行详细的讨论.

二、劈尖

观察劈尖干涉的实验装置如图 15.15(a) 所示, 两块平面玻璃片 G_1 和 G_2 , 一端互相叠合, 另一端之间用线度为 D 的小物体(如细丝、纸片等) 隔开, 此时夹在两平面玻璃片之间的劈形空气薄膜称为空气劈尖. 把两玻璃片的交线称为棱边或劈棱, 在平行于棱边的直线上, 劈尖薄膜的厚度是相同的. 图中 M 为倾角为 45° 放置的半透明半反射的平面镜, L 为透镜, T 为显微镜.



(a) 观察劈尖干涉装置

(b) 劈尖干涉条纹

图 15.15 劈尖干涉

由光源 S 发出的单色光经透镜 L 后成为平行光, 经平面镜 M 反射后垂直照射劈尖装置, 此时经空气薄膜的上、下表面反射所形成的光为相干光, 因而发生干涉. 从显微镜中可观察到明暗交替且均匀分布的干涉条纹, 如图 15.15(b) 所示, 图中相邻

明条纹(或暗条纹)中心间的距离 b 称为劈尖干涉的条纹宽度. 劈尖干涉条纹的分布可借助图 15.16 来分析, 图中的 L 为玻璃片的长度(可认为是空气劈尖的长度), 两玻璃片之间的夹角 θ 称为劈尖角. 由于 θ 很小, 因而在劈尖的上表面和下表面反射的光都可认为是垂直于劈尖表面的, 它们在劈尖上表面处相遇而相干叠加. 设空气劈尖的折射率为 n , 玻璃的折射

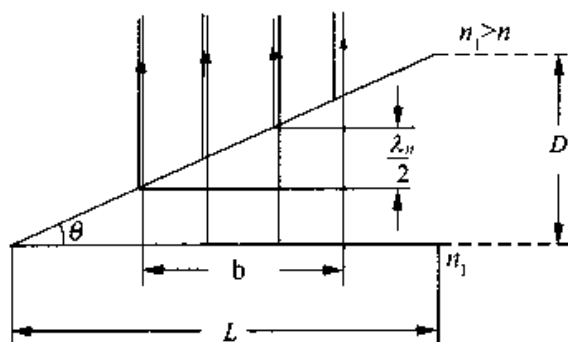


图 15.16 劈尖干涉条纹分布

率为 n_1 ($n < n_1$), 在此情况下, 由式(15-13)可知, 半波损失项 $\delta' = \frac{\lambda}{2}$, 所以经劈尖薄膜上、下表面反射的两相干光的光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

式中 e 为相干光所在处空气劈尖的厚度.

因而, 干涉产生明条纹的条件是

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (15-14)$$

干涉产生暗条纹的条件是

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (15-15)$$

由劈尖干涉条件可知, 对某一波长的入射光, 薄膜厚度 e 相同的地方, 光程差也相同, 因而干涉情况就相同. 根据劈尖薄膜厚度的分布特点可知, 干涉条纹是平行于棱边明暗相间的直线条纹. 在两玻璃片的接触处, 劈尖厚度 $e = 0$, 所以 $\delta = \frac{\lambda}{2}$, 即在棱边处干涉条纹为暗纹, 这与实际观察结果是一致的. 这一结果进一步印证了半波损失的结论. 由式(15-14)和(15-15)容易得到, 相邻明条纹或相邻暗条纹之间劈尖薄膜的厚度之差. 设第 k 级明条纹处劈尖的厚度为 e_k , 第 $k+1$ 级明条纹处劈尖的厚度为 e_{k+1} , 则

$$e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda_n}{2}$$

式中 λ_n 为光在折射率为 n 的介质中的波长. 上式表明, 两相邻明条纹处劈尖薄膜的厚度差为入射光在劈尖介质中波长的一半; 同理, 两相邻暗条纹处劈尖薄膜的厚度

差也为入射光在劈尖介质中波长的一半,显然,相邻的明、暗条纹处劈尖薄膜的厚度差为入射光在劈尖介质中波长的四分之一。

另外,根据图 15.16,由几何关系可得

$$b \sin \theta = \frac{\lambda_n}{2}$$

式中 θ 角是定值,所以干涉条纹是等间距的,且 θ 越小,条纹间距越大; θ 越大,条纹间距越小,如果 θ 较大,条纹间距将小到无法分辨。一般 θ 角很小,在计算中常利用关系式 $\sin \theta \approx \tan \theta$, $\sin \theta \approx \theta$ 简化计算,故上式为

$$\theta = \frac{\lambda_n}{2b}$$

又
$$\frac{D}{L} = \tan \theta \approx \theta$$

所以
$$D = \frac{\lambda_n L}{2b} = \frac{\lambda L}{2nb}$$

由上式可知,若已知劈尖角 θ 和干涉条纹间距 b ,就可以计算出入射单色光的波长 λ ;反之,若已知单色光的波长 λ 和干涉条纹间距 b ,就可求出劈尖角 θ ,进而由几何关系可求得夹在两玻璃片之间的细小物体的线度。工程技术上常用此原理测定细丝的直径或薄片的厚度。

劈尖干涉在实际中有很多应用的例子,生产中常用来检测工件的平整度。由以上讨论可知,若劈尖的上下表面都是光学平面,干涉条纹是一系列平行且等间距的明暗条纹。如果两玻璃片中一块是标准的光学平面,而另一块是凹凸不平的待检玻璃片或金属抛光面,此时干涉条纹将不再是直条纹,而是疏密不均匀且不规则的条纹。如图 15.17(a) 所示,图中 M 为透明的标准玻璃, M' 为待检平板,如果待检平板的表面也是理想的光学平面,则干涉条纹将是一组间距为 b 且均匀分布的平行直条纹,如图 15.17(b) 所示。若待检平板的表面凹凸不平,则干涉条纹将不再是平行的直条纹,如图 15.17(c) 所示。这种情况下,可根据条纹弯曲的程度及弯曲的方向,对待检平板在该处的凹凸情况做出判断。因相邻明(暗)条纹间空气薄膜的厚度相差是 $\frac{\lambda}{2}$,用这种方法能检测出约 $\frac{\lambda}{4}$ 的凹凸缺陷,精密度可达 $0.1 \mu\text{m}$ 左右。劈尖干涉应用的另一个例子是测定薄膜厚度。在半导体元件的制备过程中,常在半导体材料硅(Si)片上镀一层很薄的二氧化硅(SiO_2)薄膜以保护半导体元件,要对二氧化硅薄膜的厚度进行测量,可将其制成劈尖形状,如图 15.18 所示。利用劈尖干涉装置,可测

出于干涉明条纹(或暗条纹)的数目,再利用几何关系,就可计算出二氧化硅薄膜的厚度 e 。

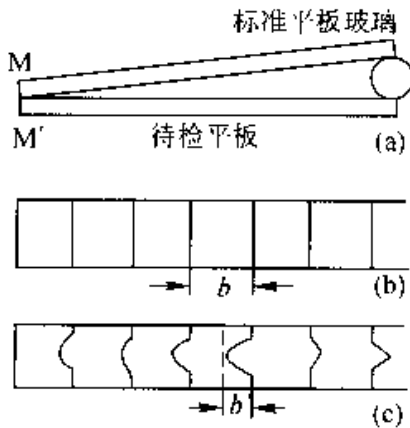


图 15.17 待检平板的表面检验

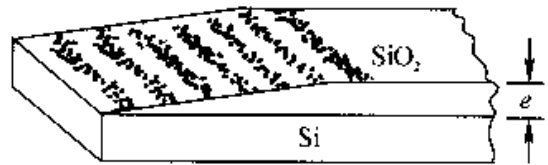


图 15.18 SiO_2 劈尖上的干涉条纹

例 15-7 利用劈尖干涉测量细金属丝的直径. 用平行单色光垂直照射空气劈尖, 单色光波长 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$, 金属丝与棱边之间的距离 l 为 28.88 mm , 测得 30 条明条纹之间的总距离为 4.295 mm , 求细金属丝的直径 D 。

解 参考图 15.16, 由几何关系可得

$$D = l \tan \theta$$

式中 θ 为劈尖角. 由于相邻明条纹间空气薄膜的厚度差为 $\frac{\lambda}{2}$, 则有

$$b \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

θ 角很小, $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{D}{l}$, 即

$$b \sin \theta = b \frac{D}{l} = \frac{\lambda}{2}$$

故金属细丝直径为

$$\begin{aligned} D &= \frac{l \lambda}{2b} = \frac{28.88 \times 589.3 \times 10^{-6}}{2 \times \frac{4.295}{29}} \\ &= 5.746 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

例 15-8 如图 15.19(a) 所示, 用一标准平板玻璃放在待检工件上测量工件表面的平整度, 标准平板玻璃和待检工件之间形成空气劈尖. 现用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的单色光垂直照射劈尖, 得到如图 15.19(b) 所示的干涉条纹, 则

(1) 待检工件不平处是凸的还是凹的?

(2) 如果相邻明条纹的间距 $b = 2$ mm, 条纹最大弯曲处与该处条纹距离 $a = 0.6$ mm, 则工件不平处的高度或深度为多少?

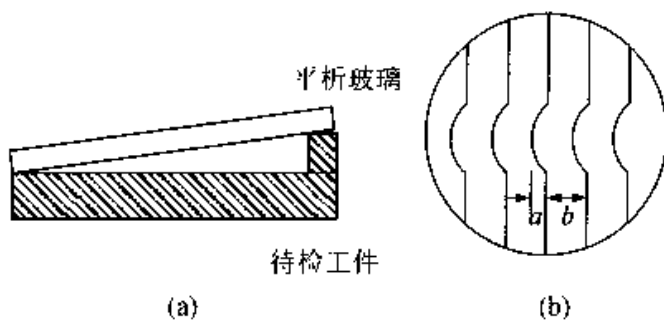


图 15.19

解 (1) 由于平板玻璃是完全平整的, 现等厚干涉条纹出现弯曲, 说明待

检工件不平整. 由于同一等厚干涉条纹对应的空气薄膜厚度是相等的, 因此在同一条纹上弯曲部分和直线部分对应的空气膜的厚度也是相等的. 由题可知, 干涉条纹向棱边一侧弯曲, 而靠近棱边一侧的空气膜厚度越来越小, 说明待检工件的不平处是凹下去的.

(2) 根据图 15.19(b) 来计算工件凹下去的深度. 设 e_k 和 e_{k+1} 分别是第 k 级和第 $k+1$ 级条纹对应的正常空气薄膜的厚度, Δe 表示相邻两条纹对应的空气薄膜的厚度差, h 是凹下去的深度. 参考图 15.20, 由相似三角形可得

$$\frac{h}{\Delta e} = \frac{a}{b}$$

对于空气薄膜, $\Delta e = \frac{\lambda}{2}$, 即

$$h = \frac{\lambda a}{2b} = \frac{632.8 \times 10^{-6} \times 0.6}{2 \times 2} = 9.492 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

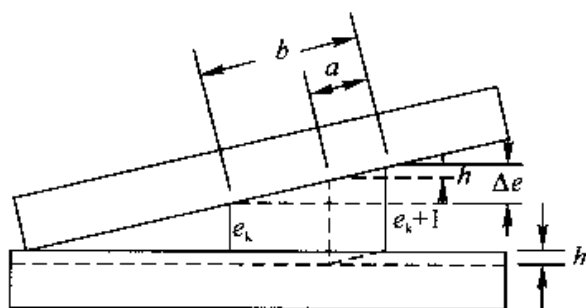


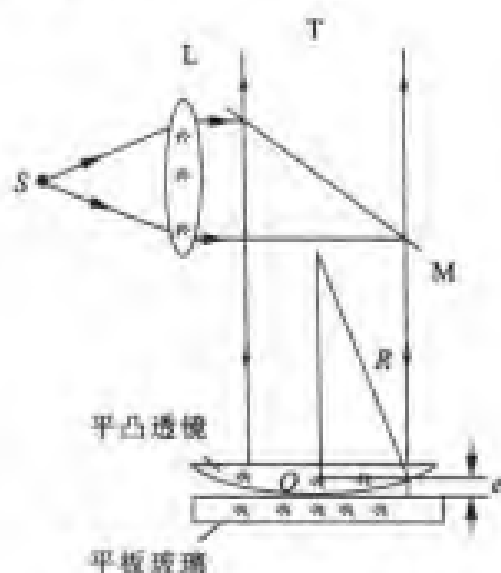
图 15.20

即待检工件表面不平处凹下的深度是 9.492×10^{-5} mm.

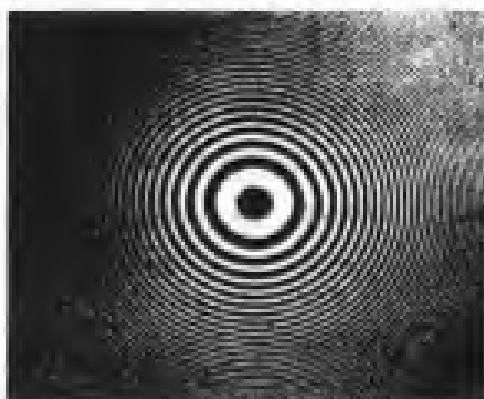
三、牛顿环

如图 15.21(a) 所示, 一曲率半径为 R (很大的) 平凸透镜放在一平板玻璃上, 两者之间形成厚度不均匀的空气薄膜, 即形成上表面是半径为 R 的球面, 下表面为平面的空气劈尖. 由 S 发出的单色光经半透半反镜 M 反射后, 垂直射向空气劈尖, 并在透镜下表面 (空气薄膜上表面) 和平板玻璃上表面 (空气薄膜下表面) 反射形成相干光, 从而在显微镜 T 中可观察到如图

15.21(b)所示的干涉条纹.由于空气劈尖的等厚轨迹是以接触点 O 为圆心的一系列同心圆,所以干涉条纹也都是以接触点 O 为圆心的一系列间距不等的同心圆环.由于此干涉图样最早是由牛顿观察到的,因而将此干涉图样称为牛顿环.牛顿环也是等厚干涉条纹.



(a) 观察牛顿环干涉装置



(b) 牛顿环干涉图样

图 15.21 牛顿环干涉

由于空气劈尖的折射率(近似为1)小于玻璃的折射率,因此在劈尖厚度为 e 处,由透镜下表面和平板玻璃上表面反射的两相干光的光程差(存在半波损失)为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

所以干涉明暗条纹所在处空气劈尖的厚度应满足以下关系

$$2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad \text{明环} \quad (15-16)$$

$$2e + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad \text{暗环} \quad (15-17)$$

在接触点 O 处, $e = 0$,则有 $\delta = \frac{\lambda}{2}$,因而反射式牛顿环的中心是暗纹.

由图 15.21(a) 可得

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2Re - e^2$$

式中 r 是薄膜厚度为 e 的等厚轨迹的半径.因为 $R \gg e$,所以 $e^2 \ll 2Re$,将 e^2 项略去,得

$$e = \frac{r^2}{2R}$$

将上式代入干涉明环和暗环条件,得到干涉明环和干涉暗环的半径分别为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{明环半径} \quad (15-18)$$

$$r = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗环半径} \quad (15-19)$$

由式(15-18)和(15-19)可分别计算出各级明、暗环的半径及相邻明(暗)环间的距离,计算可知, k 越大,相邻明(暗)环之间的间距越小.因而干涉环并不是均匀分布的,而是内疏外密,越向外干涉环越密,如图 15.21(b)所示.

常用牛顿环实验测量透镜的曲率半径 R . 由于实际观察到的牛顿环中心并非是暗点,而是有一定大小的暗斑(由于实际仪器元器件相互叠放的挤压等因素影响),暗斑的出现导致干涉环的半径不易直接准确测定,并且不能确定干涉环的级数,因而,在实际应用中,常取第 k 圈暗环的直径 d_k 和由它向外第 m 圈暗环的直径 d_{k+m} ,由暗环条件得

$$d_k^2 = (2r_k)^2 = 4kR\lambda$$

$$d_{k+m}^2 = (2r_{k+m})^2 = 4(k+m)R\lambda$$

则

$$d_{k+m}^2 - d_k^2 = 4mR\lambda$$

所以平凸透镜的曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4m\lambda}(d_{k+m}^2 - d_k^2) \\ &= \frac{1}{4m\lambda}(d_{k+m} - d_k)(d_{k+m} + d_k) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{m\lambda}(r_{k+m}^2 - r_k^2) \\ &= \frac{1}{m\lambda}(r_{k+m} - r_k)(r_{k+m} + r_k) \end{aligned}$$

例 15-9 图 15.22 所示为测量油膜折射率的实验装置. 在平面玻璃片 G 上放一滴油,并扩展成圆形油膜. 在波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的单色光垂直入射下,从反射光中可观察到油膜所形成的干涉条纹. 已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.50$,油膜的折射率 $n_2 = 1.20$. 问:当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距 $h = 800 \text{ nm}$ 时,干涉条纹是如何分布的?可看到几条明条纹?明纹所在处的油膜厚度为多少?油膜中心点的明暗程度如何?

解 测量的原理与牛顿环和劈尖干涉测量的原理是类似的. 所不同的是, 该实验中光在空气-油及油-玻璃的交界面上反射时均有相位的突变, 因此产生明纹处油膜的厚度 e 满足的条件为

$$2n_2e = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

即
$$e = \frac{k\lambda}{2n_2}$$

由此可得

$$k = 0, e_0 = 0$$

$$k = 1, e_1 = 2.5 \times 10^2 \text{ nm}$$

$$k = 2, e_2 = 5.0 \times 10^2 \text{ nm}$$

$$k = 3, e_3 = 7.5 \times 10^2 \text{ nm}$$

$$k = 4, e_4 = 1.0 \times 10^3 \text{ nm}$$

.....

由于油膜厚度相同的地方干涉情况相同, 所以从反射光中观察到的干涉条纹为明暗相间的同心圆环. 当 $h = 800 \text{ nm}$ 时, 可观察到四条明条纹 ($k = 0, 1, 2, 3$). 油膜外缘处 $e = 0$, 为零级明纹中心, 油膜中心处 $e = h = 800 \text{ nm}$, 其明暗程度介于明纹最亮和暗纹最暗之间.

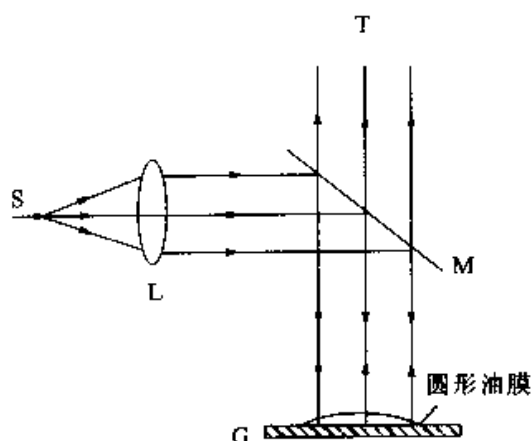


图 15.22

§ 15.5 迈克耳孙干涉仪

干涉仪是根据光的干涉原理制成的精密测量仪器, 它可精密的测量长度的微小变化. 干涉仪的种类很多, 这一节我们介绍典型的双光束干涉仪——迈克耳孙(A. A. Michelson, 1852—1931, 美国物理学家)干涉仪. 迈克耳孙干涉仪在物理学发展史上发挥过重要作用.

迈克耳孙干涉仪的原理如图 15.23 所示. M_1 和 M_2 是两片精密磨光的平面反射镜, 其中 M_2 用螺旋测微计控制, 可在支架上沿镜面法线方向前后移动, 而 M_1 是固定的, M_1 和 M_2 相互垂直放置. G_1 和 G_2 是两块材料相同、厚度均匀且相等的平行玻璃板(要求非常严格, 一般是将一整块玻璃板磨成严格平行的光学平面, 然后将其分割

成完全相同的两块). 玻璃板 G_1 的背面镀有半透明薄银层, 其作用使照射在 G_1 上的光分成强度几乎相等的透射光和反射光. G_1 和 G_2 两平行玻璃板与 M_1 和 M_2 成 45° 角放置.

从单色光源 S 发出的一束光线经透镜 L_1 后水平照射到 G_1 上(与 G_1 成 45° 入射角), 其背面的半透明膜使光线分成能量几乎相等的透射光线 1 和反射光线 2, 它们分别垂直入射到 M_1 和 M_2 上. 光线 1 透过 G_2 经 M_1 反射后再次透过 G_2 到达 G_1 处, 在 G_1 处被反射后成为光线 $1'$, 向观察屏 P 处传播; 光线 2 经 M_2 反射后回到 G_1 , 透过 G_1 后成为光线 $2'$, 也传向观察屏 P . 显然光线 $1'$ 和 $2'$ 是相干光, 在观察屏处可观测到干涉条纹. 由于光线 2 先后三次穿过 G_1 到达观察屏, 而光线 1 到达观察屏时只穿过了 G_1 一次, 为了减小光线 2 因多次透过玻璃板 G_1 所形成的光线 $2'$ 与光线 $1'$ 过大的光程差, 因此才设计了厚度和 G_1 完全相同的玻璃板 G_2 , G_2 起到了补偿光程的作用, 它保证了光线 $1'$ 和 $2'$ 经过玻璃板后的光程相等, 所以常称玻璃板 G_2 为补偿板, G_1 常称为分光板.

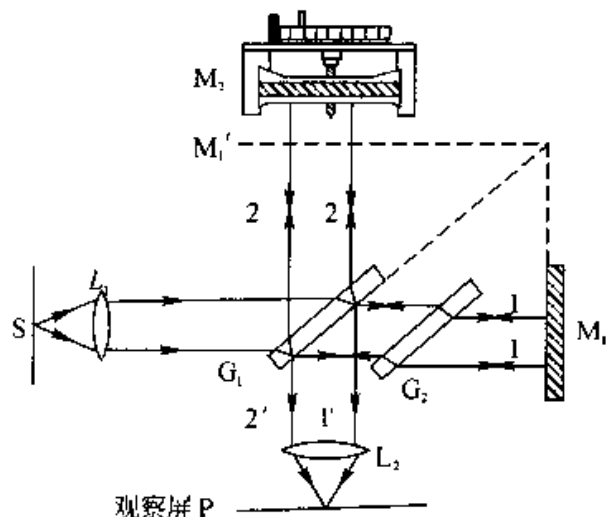


图 15.23 迈克耳孙干涉仪

对于观察者来说, 来自 M_1 和 M_2 的反射光看上去是来自 M_1' 和 M_2 的反射光, M_1' 是平面镜 M_1 经 G_1 镀膜面所成的虚象, 因而干涉产生的图样和由 M_1' 和 M_2 之间的空气薄膜产生的干涉图样相同. 当 M_1 和 M_2 严格相互垂直时, M_1' 和 M_2 就严格平行, 它们之间的空气薄膜厚度均匀, 这时可以观察到等倾干涉条纹, 调节可移动的 M_2 做微小移动, 视场中的干涉条纹将发生变化, M_2 镜每移动 $\frac{\lambda}{2}$ 的距离, 视场中心就会冒出或缩进一个干涉环纹; 当 M_1 和 M_2 不严格垂直时, M_1' 和 M_2 就不严格平行, 它们之间形成空气劈尖, 这时可以观察到等厚干涉条纹, M_2 镜每移动 $\frac{\lambda}{2}$ 的距离, 就有一个明条纹从视场中移过, 因此视场中明条纹移动的数目 N 与 M_2 镜移动距离的关系式是

$$d = N \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (15-20)$$

由式(15-20)可以看出,已知 M_2 镜移动的距离和视场中干涉条纹移过的数目 N ,就可以计算单色入射光的波长;同样,已知波长和视场中移过的条纹数目 N ,就可以计算 M_2 镜移动的距离.光波的波长数量级为 10^{-7} m,所以用迈克耳孙干涉仪测量变化的距离的精度是很高的.

迈克耳孙干涉仪的测量结果精度很高,可以精确到与波长相比拟,应用很广.迈克耳孙用他设计的干涉仪最早以光的波长测定了国际标准米尺的长度,光的波长是物质的基本属性之一,由此可建立一个永久不变的标准.此外,迈克耳孙还用干涉仪研究光谱的精细结构,推动了原子物理和计量科学的发展,为此,迈克耳孙获得了1907年诺贝尔物理学奖.后来,人们又以迈克耳孙干涉仪为原型,研制了多种形式的干涉仪,用来测定物质的折射率和杂质浓度,以及检查光学元件的质量等.

例 15-10 迈克耳孙干涉仪中补偿板 G_2 的厚度 $d = 2$ mm,折射率 $n_2 = \sqrt{2}$,若将补偿板 G_2 由原来与水平方向成 45° 角位置转到竖直位置,在此过程中观察到视场中有 1 384 条明条纹移过,试求人射光的波长.

解 当补偿板 G_2 与水平方向成 45° 角时,由折射定律(空气折射率 $n_1 = 1$)

$$n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$$

得光在补偿板内的折射角 γ 为

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ\right) = 30^\circ$$

所以光通过补偿板一次的光程为

$$\delta = n_2 \frac{d}{\cos 30^\circ}$$

补偿板转到竖直位置后,总光程的改变量为

$$\Delta\delta = 2n_2 \left(\frac{d}{\cos 30^\circ} - d\right) = 2n_2 d \left(\frac{1}{\cos 30^\circ} - 1\right)$$

由于光程的改变,视场中有 1 384 条明条纹移过,则

$$\Delta\delta = N\lambda$$

所以,入射光的波长为

$$\lambda = \frac{\Delta\delta}{N} = \frac{2 \times \sqrt{2} \times 2 \times 10^{-3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)}{1384} = 632.3 \text{ nm}$$

§ 15.6 光的衍射

一、光的衍射现象

波在传播过程中遇到障碍物时,能够绕过障碍物的边缘前进,到达了按直线传播不能到达的地方,波这种偏离直线传播的现象称为波的衍射现象(或绕射现象).衍射和干涉一样,也是波动的主要特征之一.光是一种电磁波,也存在衍射现象.如图 15.24 所示,光源 S 发出的光照射到圆孔上,当圆孔的直径比较大时,在接收屏上显示的是一亮度均匀的圆光斑,如图 15.24(a) 所示;如果将圆孔逐渐缩小,接收屏上的光斑也相应缩小,如图 15.24(b) 所示;当圆孔的直径变得很小,与入射光的波长可相比拟时,接收屏上的光斑不再继续缩小,反而变大,并且形成明暗相间的圆环,如图 15.24(c) 所示.类似的情况很多,例如把一根金属细线(作为对光的障碍物)放在光源和接收屏之间,在“影子”的中央应该是最暗的地方,实际观察到的却是明亮的.这种光绕过障碍物的边缘而进入几何阴影内传播,并且在接收屏上出现光强分布不均匀的现象,叫做光的衍射.

光的衍射现象日常生活中很少见到,衍射现象能否出现,主要决定于障碍物的线度和入射光波长大小的对比.光波的波长较小,数量级在 10^{-7} m 左右,当障碍物或孔隙的尺寸比入射光的波长大得多时,光沿直线传播;当障碍物或孔隙的尺寸与光波波长可以比拟时,衍射现象就明显地显现出来.声波的波长可达几十米,无线电波的波长可达几百米,它们遇到的障碍物通常小于其波长,因此它们在传播过程中绕过障碍物发生衍射的现象比较常见.一般的障碍物或孔隙的尺寸都大于数量级为 10^{-7} m 的光波的波长,所以光通常表现为沿直线传播,发生衍射的现象则一般少有见到.

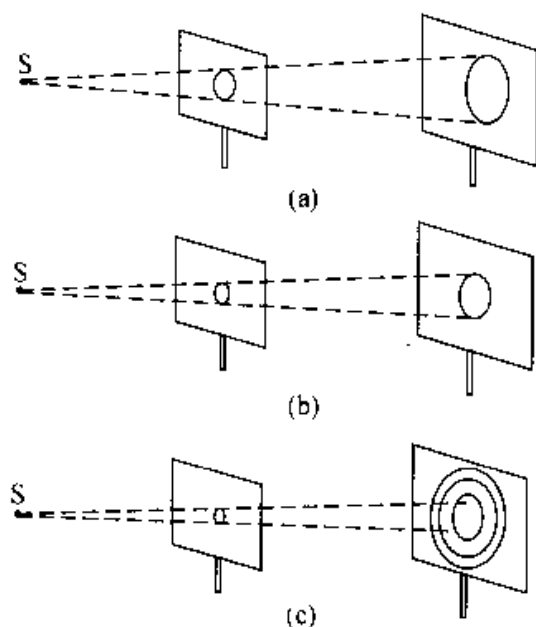


图 15.24 光通过不同的小孔

二、惠更斯—菲涅耳原理

前面我们曾介绍了惠更斯原理,应用惠更斯原理可以定性的解释光的衍射现象,但却不能定量分析射图样中光强的分布.

菲涅尔发展了惠更斯原理,补充了描述子波的相位和振幅的定量表达式,并在此基础上提出了子波相干叠加的原理,此原理称为惠更斯—菲涅耳原理,可简述为:波阵面上的每一点都可看成是产生子波的子波源,从同一波阵面上各点发出的子波是相干波,这些子波在空间某点相遇时,产生相干叠加.

惠更斯—菲涅耳原理中关于子波的振幅和相位可表述如下,如图 15.25 所示,波阵面 S 上每个面积元 dS 都可看为子波波源,则(1)波阵面是等相位面,可认为面积元 dS 上各点所发出的子波都具有相同的初相位,可设为 0.(2)子波在空间某点 P 处所引起的振幅与距离 r 成反比.(3)从面积元 dS 所发出的子波在点 P 的振幅正比于面积元 dS ,且与倾角 θ 有关,其中 θ 为 dS 的法线 e_n 与 dS 到点 P 的连线 r 之间的夹角.(4)子波在点 P 的相位由光程差 $\delta = nr$ 决定,即 $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi nr}{\lambda}$.

据此可得,面积元 dS 发出的子波在点 P 的振动可表示为(设 $t = 0$ 时,波阵面 S 的相位为零)

$$dE = Ck(\theta) \frac{dS}{r} \cos(\omega t - \frac{2\pi nr}{\lambda})$$

式中 C 为比例系数, $k(\theta)$ 为倾斜因子,随 θ 角的增大而减小,沿原波传播方向的子波振幅最大,当 $\theta = 0$ 时, $k(\theta)$ 可取 1,子波不能向后传播,即当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ 时, $k(\theta) = 0$.

波阵面前方点 P 的振动是 S 面上所有面积元 dS 发出的子波在该点振动的叠加,所以

$$E = \int_S dE = C \int_S \frac{k(\theta)}{r} \cos(\omega t - \frac{2\pi nr}{\lambda}) dS \quad (15-21)$$

式(15-21)称为菲涅耳衍射积分.此公式较为复杂,只有在某些特殊条件下,积分可用代数加法或矢量加法代替.

三、菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

根据观察方式的不同,光的衍射通常可分为两类.一类是光源或接收屏与衍射屏(孔或缝隙)的距离为有限远,此种衍射称为菲涅耳衍射或近场衍射,如图

15.26(a) 所示. 另一类是光源和接收屏与衍射屏(孔或缝隙)的距离为无限远, 即衍射中的入射光和衍射光都是平行光, 此种衍射称为夫琅禾费(J. Fraunhofer)衍射或远场衍射, 如图 15.26(b) 所示. 在实验室中可用两个会聚透镜来实现夫琅禾费衍射, 如图 15.26(c) 所示. 夫琅禾费衍射在理论分析上较为简单, 而且在实际应用和理论研究中都十分重要, 因此本教材只讨论夫琅禾费衍射.

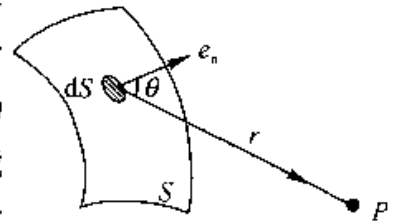


图 15.25 子波相干叠加

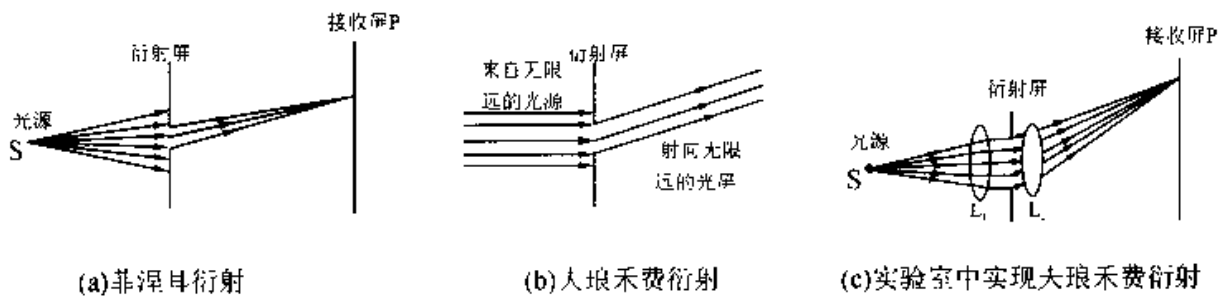


图 15.26 两类衍射

§ 15.7 夫琅禾费衍射

一、单缝衍射

夫琅禾费单缝衍射装置如图 15.27 所示, 位于透镜 L' 焦平面上的单色线光源 S 发出的光, 经透镜 L' 成为平行光, 并照在开有单狭缝的衍射屏 G 上, 透过单缝的光经透镜 L 会聚在位于透镜 L 焦平面上的接收屏 P 上, 形成一组明暗相间的平行直条纹.

根据惠更斯—菲涅耳原理, 单缝后接收屏上任一点的光振动是位于单缝处波阵面上所有子波波源发出的子波传到该点的振动的相干叠加. 对于单缝衍射可用菲涅耳提出的波带法进行分析研究. 图 15.28 是夫琅禾费单缝衍射的光路图, 单色平行光垂直照射宽度为 a 的狭缝 AB , 通过狭缝的光发生衍射, 衍射光与狭缝所在平面法线的夹角叫做衍射角, 在图中用 θ 表示. 衍射角 θ 相同的衍射光经过透镜 L 后会聚在焦平面上同一点 Q , 该点的光强就是由这些平行光相干叠加形成的. 我们知道透镜 L 不产生附加的光程差, 且平行的入射光在 AB 面是等相位的, 所以, 单缝 AB 两边缘

处衍射光线之间的光程差为

$$\delta = \overline{AC} = a \sin \theta \quad (15-22)$$

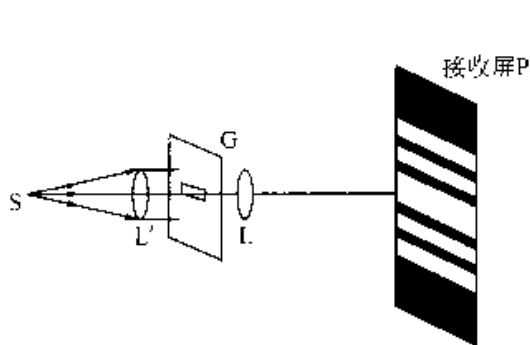


图 15.27 夫琅禾费单缝衍射

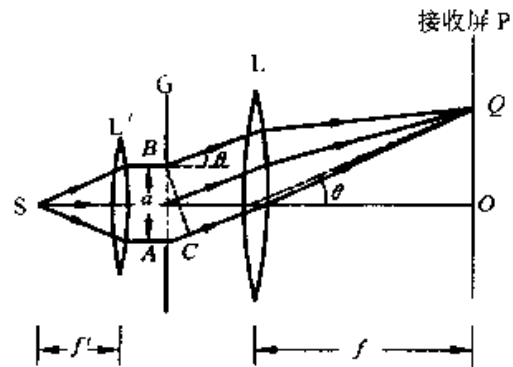


图 15.28 单缝衍射光路图

菲涅耳在惠更斯—菲涅耳原理的基础上,提出了将波阵面分割成许多等面积的波带的方法.在单缝衍射中,把狭缝分割成一系列宽度相等的窄条带,并使相邻窄条带上的对应点(如每个窄条带的最上点、中点或最下点)发出的光在点Q的光程差都为人射光的半个波长,这样分割成的窄条带称为半波带,如图15.29所示.用这样的半波带来

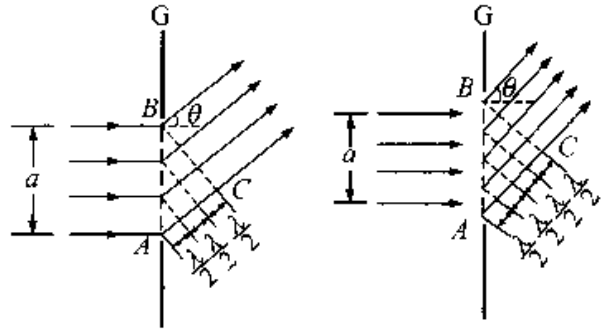


图 15.29 单缝的非涅耳半波带

分析衍射图样的方法称为半波带法.由图15.29可知,相邻的两个半波带到达点Q的距离近似相等,它们所发出的子波在点Q的振幅可认为也是相等的,而相邻两个半波带上每一对应点所发出的子波的光程差总是 $\frac{\lambda}{2}$,或相位差总是 π ,所以,任何两个相邻半波带所发出的子波在点Q引起的振动将完全抵消.

对应于衍射角为 θ 的半波带的数目N为

$$N = \frac{a \sin \theta}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2a \sin \theta}{\lambda}$$

当N为偶数,即单缝处波阵面可分为偶数个半波带时,每对相邻的半波带所发出的光到达点Q引起的振动相互抵消,合振幅为零,因而出现暗条纹,而点Q所在处为该暗条纹的中心.当N为奇数,即单缝处波阵面可分为奇数个半波带时,每对相邻

的半波带所发出的光在点 Q 引起的振动相互抵消后,还剩下一个半波带发出的光没有被抵消,而在点 Q 合成,因而出现明条纹,点 Q 所在处为该明条纹的中心.若 N 不是整数,即单缝处波阵面不能被恰好分为整数个半波带时,衍射光在点 Q 处叠加形成的条纹亮度介于最明和最暗之间.由式(15-22)可知,当 $\theta = 0$ 时,所有衍射光的光程差为零,这些衍射光通过透镜 L 后会聚在透镜焦平面上,这就是中央明条纹的中心位置.所以,夫琅禾费单缝衍射产生明暗条纹的条件分别为

$$\text{暗条纹中心} \quad a \sin \theta = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (15-23)$$

$$\text{明条纹中心} \quad a \sin \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (15-24)$$

式中 k 称为衍射级,分别称为第一级暗(明)条纹,第二级暗(明)条纹……,式中正负号表示各级明暗条纹对称分布在中央明纹两侧.

需要说明的是,式(15-23)和(15-24)均不包含 $k = 0$ 的情况,对于式(15-23)来说, $k = 0$ 对应的是暗条纹,但却是中央明纹的中心.而对于式(15-24)来说, $k = 0$ 虽然对应于一个半波带所形成的明条纹,由后面讨论可知,其仍处在中央明纹的范围内,仅是中央明纹的一个组成部分,形成不了单独的明条纹,因而 $k \neq 0$.

由以上讨论显然可知,中央明条纹是两个第一级暗条纹之间的区域,中央明条纹的宽度最宽,约为其它明条纹宽度的 2 倍.也就是说,中央明条纹的角宽度 θ_0 是两个第一级暗条纹之间的角距离.设第一级暗条纹对应的衍射角为 θ_1 , 则

$$\theta_0 = 2\theta_1 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

θ_1 很小, $\sin \theta_1 \approx \theta_1$

$$\text{所以} \quad \theta_0 = 2\theta_1 = 2 \frac{\lambda}{a} \quad (15-25)$$

同理分析可得,其余相邻暗条纹(或明条纹)的角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (15-26)$$

若透镜 L 的焦距为 f ,则中央明条纹的线宽度为

$$l_0 = 2f \tan \theta_1 \approx 2f \sin \theta_1 = 2f \frac{\lambda}{a}$$

其余任意两相邻暗条纹间的距离,即相应明条纹的宽度为

$$\Delta l = \theta_{k+1} f - \theta_k f = \Delta\theta \cdot f = \frac{\lambda}{a} f$$

单缝衍射的相对光强分布如图 15.30 所示. 由图可以看出, 单缝衍射的光强分布并不是均匀的. 中央明纹宽度最宽, 亮度最大, 其它明条纹的光强迅速下降. 这是因为随着衍射角 θ 的增大, 半波带数 N 增大, 每个半波带所占有的面积变小, 也就是说, 未被抵消的半波带面积变小. 一方面是 θ 增大, 另一方面是半波带面积减小, 根据惠更斯—菲涅耳原理, 其它明条纹的光强将迅速下降.

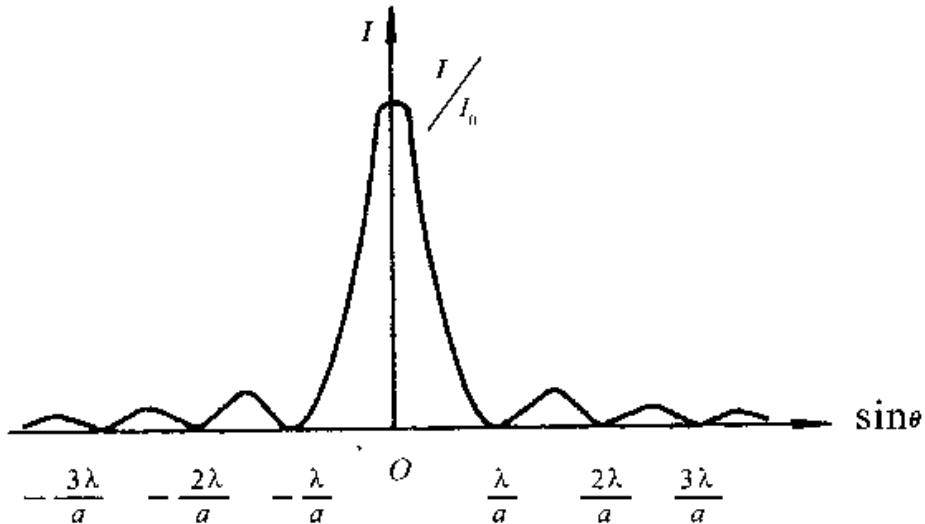


图 15.30 单缝衍射的光强分布

由以上各式可以看出, 衍射图样中各级条纹的位置与入射光的波长有关, 条纹宽度正比于波长 λ , 反比于缝宽 a . 由此可见, 如果用白光作光源, 白光中不同波长的光产生的衍射图样除中央明纹中心外将彼此错开, 于是观察到的衍射图样其中央明纹的中心仍是白色的, 但由于条纹的宽度是波长的函数, 所以中央明纹的边缘伴有彩色, 其它各级明条纹呈现出逐次重叠展开的彩色条纹.

缝的宽度 a 对衍射条纹的分布是有影响的, 由于相邻暗条纹(或明条纹)的角宽度为 $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$, 因此对于一定波长的光来说, a 越小, 相邻暗(明)条纹的角宽度越大, 衍射就越显著; 反之, a 越大, 衍射条纹就越密集, 衍射就越不明显. 若 $a \gg \lambda$, $\Delta\theta$ 将变得很小, 表现为各级衍射条纹向中央条纹靠拢, 使得衍射条纹密集无法分辨, 只能观察到一条明纹, 它就是线光源 S 所成的几何光学的象, 这时光可看成是直线传播的. 由此可见, 光的直线传播现象, 是光的波长较通光孔或狭缝(或障碍物)的线度小很多时, 衍射现象不显著的情形.

单缝衍射和本章第 3 节讨论的杨氏双缝干涉的条纹分布是不相同的, 干涉和衍射条纹都是明暗相间的条纹, 但在条纹分布上有间距均匀与相对集中的不同. 杨氏

双缝干涉条纹是等宽等亮度分布的,而单缝衍射条纹则是中央明纹既宽又亮,两侧的明条纹窄而较暗;单缝衍射的亮条纹条件和杨氏双缝干涉的亮条纹条件在形式上也正好是相反的.另外,讨论杨氏双缝干涉和单缝衍射时,我们都应用了光的叠加规律,它们都是光波相干叠加的结果,从本质上讲二者是没有区别的,只是参与干涉叠加的对象有所区别.一般而言,干涉是指分离、有限多的光束的相干叠加,而衍射是指连续的波阵面上无穷多子波源发出的光波的相干叠加,前者是粗略的,后者是精细的叠加.这只是一般的说法,实质上二者常出现在同一现象中.干涉中有衍射,衍射中也有干涉.如杨氏双缝干涉条纹的形成,实际上是通过两个狭缝的光束的相互干涉和每个狭缝本身发出的光的衍射的综合效果.

例 15-11 在单缝夫琅禾费衍射中,缝宽 $a = 5\lambda$,缝后透镜焦距 $f = 40\text{ cm}$,试求中央明条纹和第一级明条纹的宽度.

解 由式(15-23)对第一和第二级暗纹中心有

$$a\sin\theta_1 = \lambda, a\sin\theta_2 = 2\lambda$$

因此第一级和第二级暗纹中心在屏上的位置分别为(以接收屏对称中心为坐标原点)

$$x_1 = f\tan\theta_1 \approx f\sin\theta_1 \approx f\frac{\lambda}{a} = 40 \times \frac{\lambda}{5\lambda} = 8\text{ cm}$$

$$x_2 = f\tan\theta_2 \approx f\sin\theta_2 \approx f\frac{2\lambda}{a} = 40 \times \frac{2\lambda}{5\lambda} = 16\text{ cm}$$

由此可得中央明条纹的宽度为

$$l_0 = 2x_2 = 2 \times 8 = 16\text{ cm}$$

第一级明纹的宽度为

$$\Delta l_1 = x_2 - x_1 = 16 - 8 = 8\text{ cm}$$

可见第一级明条纹宽度只是中央明条纹宽度的一半.

例 15-12 如图 15.31 所示,一雷达位于公路边 15 m 处,雷达波束与公路成 15° 角.假设雷达发射天线的输出口宽度 $a = 0.10\text{ m}$,发射的微波波长是 18 mm,则它在它监视范围内的公路长度大约是多少?

解 将雷达天线的输出口看成是发出衍射波的单缝,衍射波的能量主要集中在中央明纹的范围内,由此即可估算出雷达在公路上的监视范围.考虑到雷达距离公路较远,因而可按夫琅禾费衍射做近似计算.由单缝衍射的暗纹条件得

$$a\sin\theta = \lambda$$

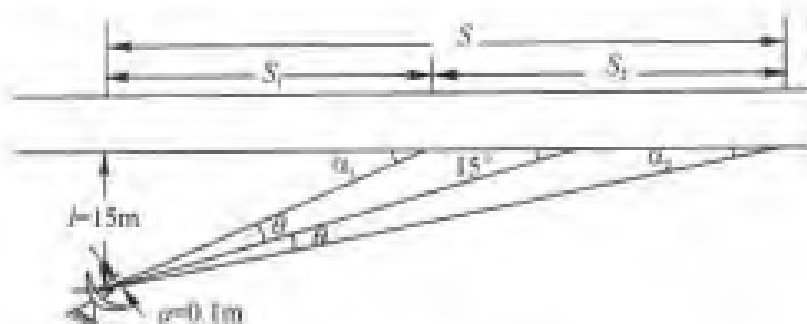


图 15.31 雷达监控

式中的 θ 即为第一级暗条纹的衍射角, 如题图所示, 因而有

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{a} = \arcsin \frac{18 \times 10^{-3}}{0.1} = 10.37^\circ$$

雷达监视范围内公路的长度为

$$\begin{aligned} s_2 &= s - s_1 = l(\cot \alpha_2 - \cot \alpha_1) \\ &= l[\cot(15^\circ - \theta) - \cot(15^\circ + \theta)] \\ &= 15 \times (\cot 4.63^\circ - \cot 25.37^\circ) \\ &= 153.6 \text{ m} \end{aligned}$$

二、圆孔衍射

光通过小圆孔时也会像通过狭缝一样产生衍射现象, 光学仪器大多数都是由透镜组成的, 透镜就相当于一个透光的小圆孔, 而且大多是通过平行光或近似平行光成象的, 在成象问题上常要涉及圆孔衍射, 所以讨论夫琅禾费圆孔衍射具有重要的意义。

将夫琅禾费单缝衍射装置中的狭缝用小圆孔代替, 其它条件不变, 就成为观察夫琅禾费圆孔衍射的装置, 按照几何光学原理, 在接收屏上将出现一个亮点, 但实际上在接收屏上看到的是圆孔衍射图样, 如图 15.32 所示, 中央是一个较亮的圆斑, 外围是一组同心的明暗相间的圆环, 由第一级暗环所围的中央光斑, 称为爱里(G. B. Airy)斑。

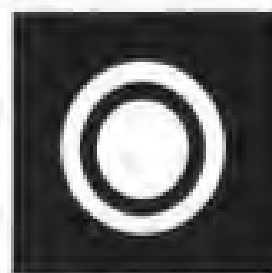


图 15.32 爱里斑

夫琅禾费圆孔衍射和单缝衍射是类似的, 圆孔衍射的光强分布也是不均匀的, 中央圆斑光强最大, 它大约集中了全部衍射光能量的 80%, 其余各级明环光强迅速减小, 圆孔的直径大小对衍射图样的影响和单缝衍射中缝宽对衍

射图样的影响是相同的,由理论计算可得

第一级暗环的衍射角 θ_1 满足

$$\sin\theta_1 = 0.16 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

式中 r 和 d 是圆孔的半径和直径,可以看出,与单缝衍射第一级暗条纹角宽度 $\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ 相比,只是比例系数不同而已.

爱里斑的角半径就是第一级暗环对应的衍射角,即

$$\theta_1 \approx \sin\theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (15-27)$$

若透镜的焦距为 f ,则爱里斑的半径 R (参考图 15.33) 为

$$R = f \tan\theta_1$$

θ_1 很小, $\tan\theta_1 \approx \sin\theta_1 \approx \theta_1$

所以
$$R = f \tan\theta_1 = 0.61 \frac{\lambda}{r} f = 1.22 \frac{\lambda}{d} f \quad (15-28)$$

三、光学仪器的分辨率

从几何光学的观点来看,物体通过光学仪器成象时,每一物点就有一对应的象点,从这个意义上说,一个微小的物体或远处的物体,只要选择合适的光学仪器,总能放大到清晰可见的程度.然而,光学仪器中常用的透镜、光阑等都相当于一个透光的小圆孔,当光透过这些小圆孔时,

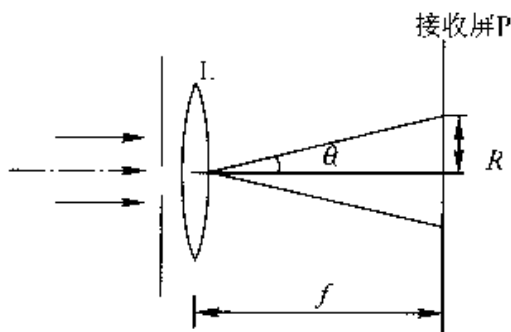


图 15.33 爱里斑半径的计算

会发生衍射现象.这样,象点不再是一个几何点,而是一个主要部分是爱里斑的圆孔衍射图样.当然,光学仪器中所用的透镜或光阑等透光圆孔的孔径比波长大多得多,不是衍射实验中的可与波长相比拟的小孔径,但孔径毕竟有限,象点仍是一个弥散的小亮斑,它的中心位置就是几何光学中象点的位置.如果两个物点相距很近,并且它们形成的衍射圆斑又比较大,以至两个圆斑大部分重合而混为一体,那么就不能分辨出是两个物点了,如图 15.34(c) 所示.如果圆斑足够小,或两个圆斑相距足够远,那么两个圆斑虽有一些重叠,但重叠部分的光强较爱里斑中心处的光强要小得多,此时仍能分辨出是两个物点,如图 15.34(a) 所示.

如何确定能否分辨的定量标准呢?德国物理学家瑞利(L. Rayleigh,

1842—1919) 提出了一个标准: 如果一个物点衍射图样的中央最亮处刚好与另一个物点衍射图样的第一个暗环相重合, 如图 15.34(b) 所示, 此时认为两个物点恰好能被人眼或光学仪器所分辨, 这一标准称为瑞利判据. 此时两个物点象的连线上中点处的光强约为每个爱里斑中心光强的 80%, 对于人眼来说恰能分辨出是两个象点.

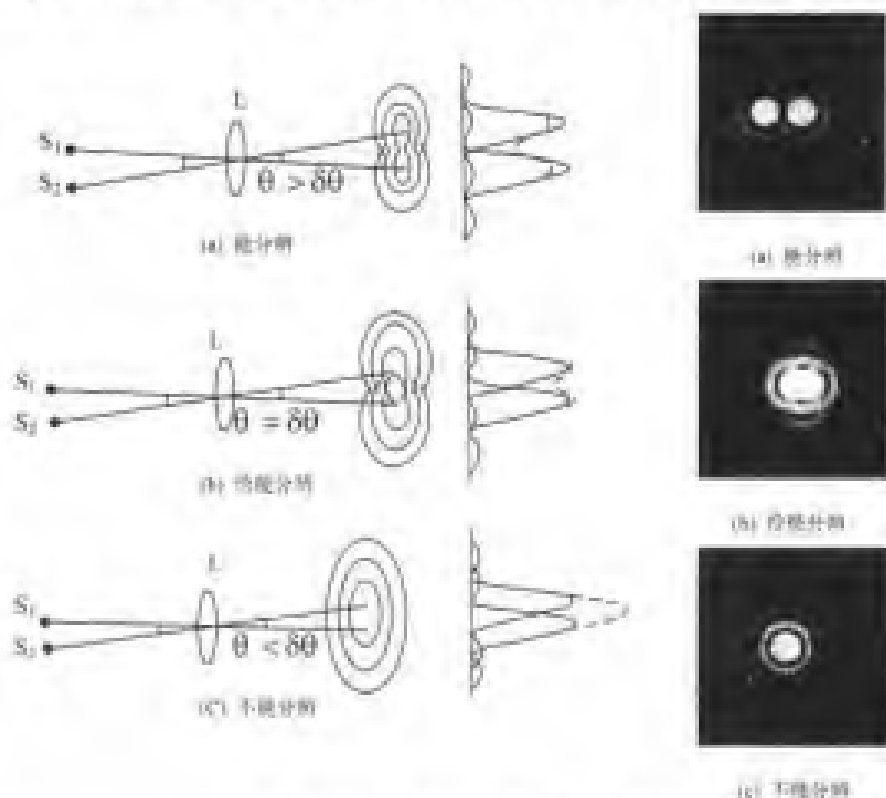


图 15.34 光学仪器的分辨本领

根据瑞利判据可定量分析光学仪器的分辨本领. 以透镜为例, 恰能分辨时两物点对透镜光心的张角称为最小分辨角, 用 θ_0 表示, 如图 15.34(b) 所示. 最小分辨角也称为角分辨率, 它的倒数称为分辨率, 常用 R 表示.

对于夫琅禾费圆孔衍射来说, 瑞利判据最小分辨角 θ_0 , 就是第一级暗环的衍射角, 即

$$\sin \theta_0 = \sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

即
$$\theta_0 = \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

分辨率为
$$R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{d}{1.22\lambda} \quad (15-29)$$

由式(15-29)可以看出, 分辨率 R 的大小与光学仪器的孔径和入射光波长有

关. 对于望远镜, 采取增大物镜的孔径来提高其分辨率. 1990 年发射的哈勃太空望远镜物镜的直径达到 2.4 m, 而现在最大的反射式望远镜的直径已达到 10 m 以上. 至于显微镜, 则采用极短波长的光来提高其分辨率. 光学显微镜一般使用波长为 400 nm 的紫光照射, 分辨距离为 200 nm 左右. 放大倍数约为 2 000. 由于电子具有波动性, 在 12 万伏加速电压下, 电子束波长可达 0.1 nm 数量级, 所以利用电子波动性成像的电子显微镜最小分辨距离可达几个纳米, 放大倍数最高可达几百万.

例 15 - 13 通常亮度下, 人眼的瞳孔直径约为 3 mm, 则人眼的最小分辨角是多少? 放在远处的两根细丝之间的距离为 4.0 mm, 则人在多远处恰能分辨出是两根细丝?

解 人的眼睛相当于一个透镜, 且人眼最敏感的黄绿光的波长为 550 nm, 所以人眼的最小分辨角为

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{3.0 \times 10^{-3}} = 2.2 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

设恰能分辨是两根细丝时人与细丝的距离为 S , 两细丝相距为 l , 两细丝对人眼张角 θ 为

$$\theta = \frac{l}{S}$$

恰能分辨时

$$\delta\theta = \theta$$

所以

$$S = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{4.0 \times 10^{-3}}{2.2 \times 10^{-4}} = 18.2 \text{ m}$$

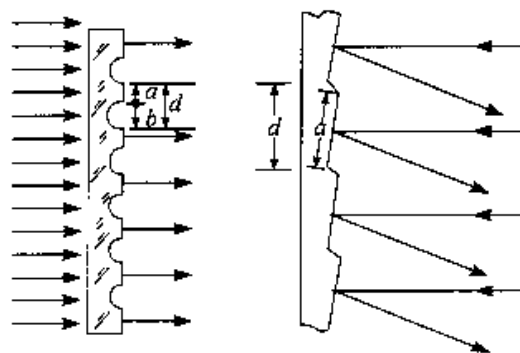
§ 15.8 衍射光栅

一、光栅

由大量等宽等间距的平行狭缝构成的光学器件称为光栅. 常用的光栅是在玻璃上刻出一系列等宽等间距的平行刻痕, 刻痕处因漫反射而相当于不透光部分, 刻痕之间的光滑部分相当于透光的狭缝, 这种光栅称为透射光栅, 如图 15.35(a) 所示. 在光洁度较高的金属表面刻画出一系列等宽等间距的平行刻痕, 刻痕之间的表面可以反射光, 这种光栅称为反射光栅, 如图 15.35(b) 所示.

简易的光栅可用照相的方法制作, 印有一系列平行且等间距的黑色条纹的照相

底片就是透射光栅. 实用的光栅在每毫米内有成千上万条刻痕, 每毫米内的刻痕越多, 光栅质量就越好. 在单缝衍射中, 若增大狭缝的宽度, 虽然明条纹的亮度会有增加, 但相邻明条纹的间距将随之变窄; 若减小狭缝宽度, 条纹间距虽可加宽, 但明条纹的亮度却显著减小. 这两种情况下, 要准确的测量条纹宽度进而测定入射光的波长就显得较为困难了. 光栅相当于很多条单缝, 利用光栅可得到既明亮又分得很开的衍射条纹, 并且可以对复色入射光进行光谱分析.



(a) 透射光栅 (b) 反射光栅
图 15.35 光栅(断面图)

二、光栅衍射条纹的形成

设透射光栅的总条数为 N , 缝宽为 a , 缝间不透光部分的宽度为 b , 两者之和 $d = a + b$ 称为光栅常数. 单色平行光垂直照射在光栅上, 仅靠光栅后面放一透镜 L , 在透镜的焦平面上放置接收屏 P , 如图 15.36 所示. 透过光栅每个狭缝的光都要发生衍射, 并且每个狭缝的衍射图样通过透镜后完全重合, 而通过光栅不同狭缝的光还要发生干涉, 所以说, 光栅的衍射实际上是每一个狭缝的衍射和不同狭缝间干涉叠加的总效果.

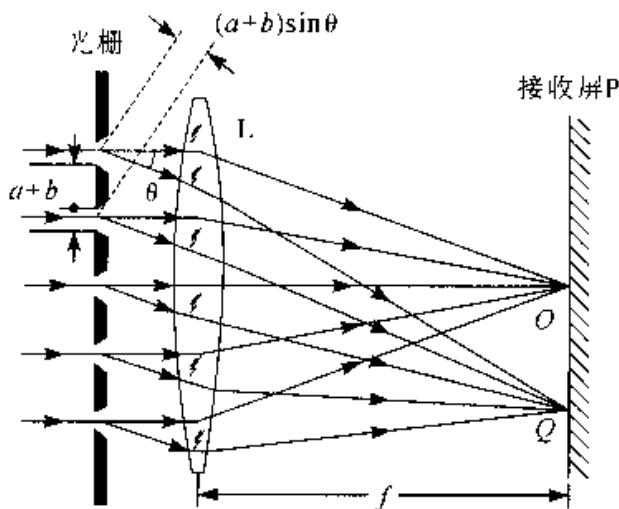


图 15.36 光栅衍射

对应于某一衍射角 θ , 任意两相邻狭缝发出的光到达接收屏上点 Q 的光程差均为

$$\delta = (a + b) \sin \theta$$

(1) 明条纹条件 若相邻两狭缝发出的光束间的相位差为 2π 的整数倍, 或者说相邻两狭缝间的光程差为波长的整数倍, 则 N 个狭缝的光束在点 Q 干涉相长, 合振动振幅最大, 产生明条纹. 所以明条纹的条件是

$$(a + b) \sin \theta = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15-30)$$

式(15-30)称为光栅方程. 满足光栅方程的明条纹称为主明纹或主极大, k 称为主极大级数, $k = 0$ 时是中央明条纹, $k = 1, 2, 3 \dots$ 分别称为第一级、第二级、第三级……主极大明条纹. 式中正负号表示各级主极大明条纹对称分布在中央明条纹两侧.

(2) 暗条纹条件 如果在点 Q 处光振动的合振幅为零, 将出现暗条纹. 设相邻两狭缝发出的光束间的相位差为 $\Delta\varphi$, 分振动的振幅矢量分别为 $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$. 要使这 N 个矢量叠加后完全相消, 意味着它们恰好组成如图 15.37 所示的闭合多边形, 此时合振幅为零, 产生暗条纹. 相位差与光程差的关系为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

N 个矢量构成闭合多边形时有

$$N\Delta\varphi = \pm k' \cdot 2\pi, \quad k' = 1, 2, 3 \dots$$

用光程差表示可表为

$$N\delta = \pm k' \lambda$$

即 $(a+b)\sin\theta = \pm k' \frac{\lambda}{N}, \quad k' = 1, 2, 3 \dots$

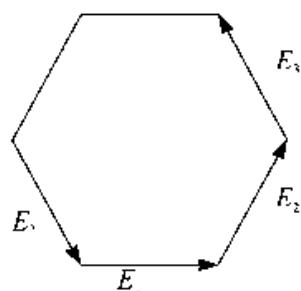


图 15.37 N 个光振幅矢量叠加

应该注意的是, 上式讨论中包含了 $\Delta\varphi = \pm k \cdot 2\pi$ 或 $\delta = \pm k\lambda$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) 的情况, 而这些情况是产生主明纹的条件, 所以应该舍去, 即将 $k' = kN$ 的情况舍去.

所以光栅衍射的暗条纹条件为

$$(a+b)\sin\theta = \pm k' \frac{\lambda}{N}, \quad k' = 1, 2, 3 \dots \text{ 且 } k' \neq kN \text{ (} k \text{ 为整数)} \quad (15-31)$$

也就是说, 这里 k' 不含 $N, 2N, \dots$ 诸值, 因为这些已属于式(15-30)光栅方程所规定的衍射主明纹的情形了. 由式(15-30)可以看出两相邻主明纹之间有 $N-1$ 条暗条纹.

(3) 次明纹 相邻的两主明纹之间有 $N-1$ 条暗纹, 而在两暗纹之间必定有一明条纹, 推知两相邻主明纹之间有 $N-2$ 条明条纹. 这些地方的振动矢量并未完全抵消, 只是部分抵消, 但计算表明这些明条纹的光强度仅为主明纹光强度的 4% 左右, 所以称为次明纹或次极大.

综上所述, 由于光栅的狭缝总数 N 很大, 两相邻主明纹之间的暗纹和次明纹数目很多, 两相邻主明纹之间实际上是一片暗区, 明条纹明显分开且很细, 光强集中在很小区域内, 明纹变得很亮, 光栅的衍射图样是在几乎黑暗的背景上出现了一系列

分得很开的又细又亮的明条纹,如图 15.38 所示。

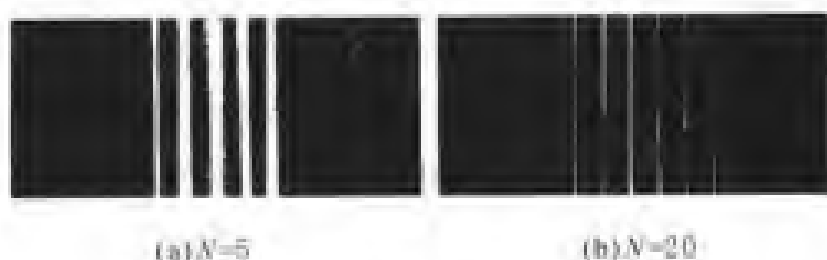


图 15.38 光栅衍射图样

我们知道,光栅的衍射是各狭缝的衍射与狭缝间的干涉共同作用的结果,图 15.39 给出了光强度分布之间的关系,其中图 15.39(a) 给出了单缝衍射图样的光强分布,图 15.39(b) 给出了多缝干涉图样的光强分布,多缝干涉和单缝衍射共同决定的光栅衍射的总光强分布如图 15.39(c) 所示。由图可以明显看到各级主明纹的光强受单缝衍射光强的调制。在图 15.39(c) 中, $k = \pm 3, \pm 6 \dots$ 等点满足光栅方程的主明纹条件 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$,该处应为主明纹,但由于这些地方又同时满足单缝衍射的暗纹条件 $a\sin\theta = k'\lambda$ [如图 15.39(a)],单缝衍射在此处光强为零,所以光栅衍射的主明纹在此处并没有出现,这种现象称为缺级现象。也就是说,在某个衍射角 θ 方向上,首先必须存在有每个狭缝的衍射光,然后 N 条衍射光才能产生干涉,即使 θ 满足了光栅方程使干涉结果为一主明纹,但若该 θ 同时又满足单缝衍射的暗条纹条件,因而在此方向根本就没有衍射光,那么结果就只能是暗条纹了。

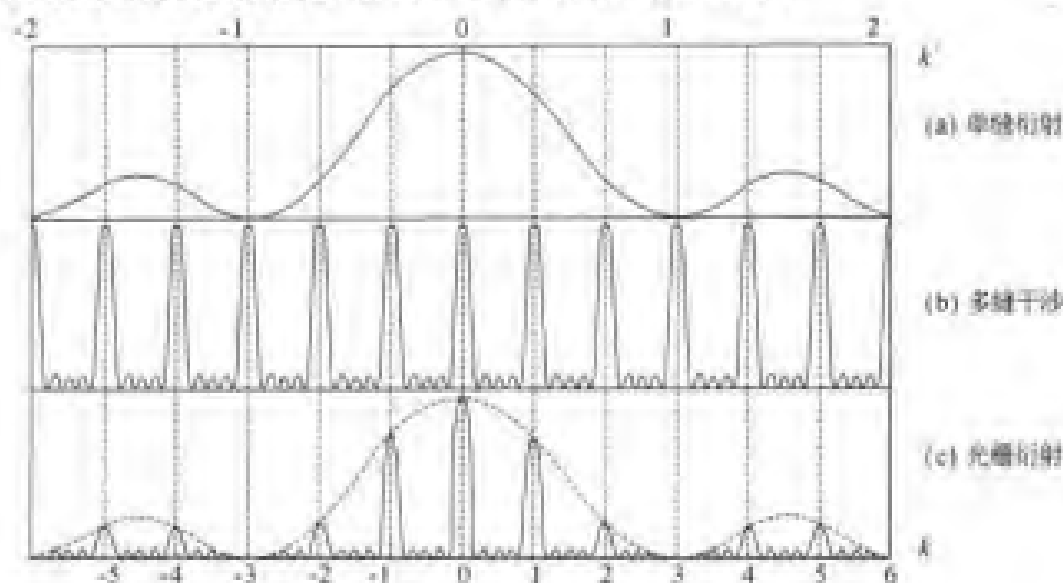


图 15.39 光栅衍射的光强分布

干涉主极大满足

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

衍射极小满足

$$a\sin\theta = \pm k'\lambda, \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

如果某一衍射角同时满足以上两方程, 则 k 级主极大缺级, 将以上两式相除得缺级级数 k 为

$$k = \pm k' \frac{a+b}{a} = \pm k' \frac{d}{a}, \quad k' = 1, 2, 3, \dots \quad (15-32)$$

由式(15-32)可知, 缺级的级数由光栅常数 d 和缝宽 a 决定. 如果光栅常数 d 与缝宽 a 构成整数比时, 就会发生缺级现象. 若 $(a+b)$ 与 a 之比为 3:1, 则在 k 与 k' 之比为 3:1 的位置处就会出现缺级, 即在 $k = 3, 6, 9, \dots$ 等这些应该是主明纹出现的地方, 实际上却观察不到它们, 出现缺级.

例 15-14 用波长为 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ 的单色平行光, 垂直照射每毫米刻有 500 条刻痕的光栅. 问最多能看到第几级条纹? 总共有多少条条纹?

解 由光栅方程 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ 得

$$k = \frac{a+b}{\lambda} \sin\theta$$

可见 k 的可能最大值相应于 $\sin\theta = 1$. 由题意可得光栅常数为

$$d = a+b = \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

由此可得

$$k = \frac{2 \times 10^{-3}}{589.3 \times 10^{-9}} = 3.4$$

k 只能取整数, 故取 $k = 3$, 即单色平行光垂直入射时能看到第三级条纹. 总共有 $2k+1 = 7$ 条明条纹.

三、衍射光谱

上面讨论的是单色光经光栅衍射后形成的衍射图样. 如果用白光照射光栅, 各种波长的单色光将各自产生衍射. 由光栅方程可知, 对于给定的光栅, 各级主明纹衍射角的大小与入射光的波长有关, 波长短的衍射角小, 波长长的衍射角大. 所以紫光衍射条纹距中央明纹最近, 红光衍射条纹距中央明纹最远. 这样, 除中央明条纹仍为

各色光混合的白光外,其两侧各级明纹都是由紫到红对称排列的彩色光带,把这种光栅衍射产生的按波长排列的谱线称为衍射光谱,如图 15.40 所示.由图可看出,级数较高的光谱中有部分谱线是彼此重叠的.

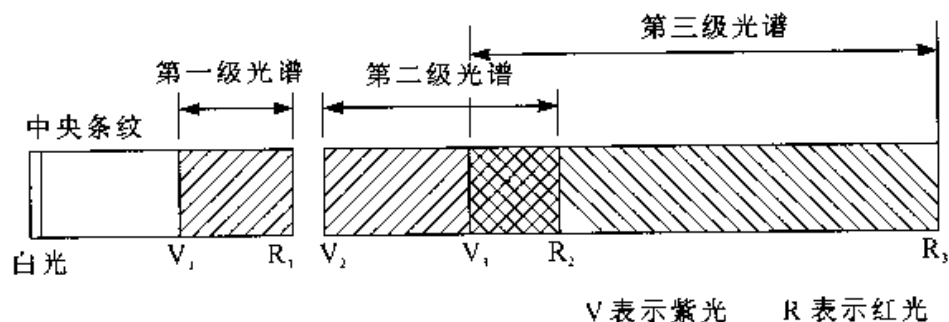


图 15.40 衍射光谱

每种物质都有自己特定的谱线,通过物质的光谱可研究物质的结构,而原子、分子的光谱是研究原子、分子结构及运动规律的主要途径.光谱分析是现代物理学重要的研究手段,广泛应用于工程技术分析、鉴定等领域.

光栅满足怎样的条件才能把不同波长的两条谱线分开呢?为此引入光栅的分辨本领(即分辨率).光栅的分辨本领是指把波长靠得很近的两条谱线分辨清楚的本领,是表征光栅性能的主要技术指标.通常把光栅恰能分辨的两条谱线的平均波长 λ 与这两条谱线的波长差 $\delta\lambda$ 之比定义为光栅的色分辨本领,用 R 表示,即

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

一个光栅能分开的两波长的波长差 $\delta\lambda$ 越小,其分辨本领就越大.由瑞利判据知,一条谱线的中心恰与另一条谱线距谱线中心最近的一个极小重合时,两条谱线恰能分辨.也就是说,对于 k 级光谱中波长为 λ 和 $\lambda + \delta\lambda$ 的两条谱线而言,波长为 $\lambda + \delta\lambda$ 的 k 级主极大与波长为 λ 的第 $kN + 1$ 级极小重合.

k 级主极大满足的条件为

$$(a + b)\sin\theta = k(\lambda + \delta\lambda)$$

$kN + 1$ 级极小满足的条件为

$$(a + b)\sin\theta' = (kN + 1) \frac{\lambda}{N}$$

两者重合 $\theta = \theta'$, 因而得

$$k(\lambda + \delta\lambda) = \frac{(kN + 1)\lambda}{N}$$

化简有

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

所以光栅的色分辨本领为

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN \quad (15-33)$$

由此可知,光栅的色分辨本领与光栅的狭缝数 N 和光谱级次 k 有关,这就是为什么光栅在单位长度上的刻痕越多,光栅质量就越好的原因.

例 15-15 用波长为 600 nm 的单色光垂直照射一平面光栅,测得第二级主极大的衍射角 θ 满足 $\sin\theta = 0.3$,且在此主极大上恰能分辨 $\delta\lambda = 0.03\text{nm}$ 的两条光谱线.第三级谱线缺失.求此光栅的参数(即光栅的狭缝数 N ,光栅常数 d ,缝宽 a)

解 光栅的色分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

由题意知, $\lambda = 600\text{ nm}$, $\delta\lambda = 0.03\text{ nm}$, $k = 2$

$$\text{则 } N = \frac{\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{600 \times 10^{-9}}{2 \times 0.03 \times 10^{-9}} = 10\,000$$

光栅衍射主极大满足条件

$$d\sin\theta = k\lambda, \quad \text{且 } \sin\theta = 0.3, k = 2$$

$$\text{所以 } d = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{0.3} = 4 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

光栅衍射中主极大缺失条件

$$k = \frac{d}{a}k', \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

k' 取 1 时, $k = 3$

$$\text{所以 } a = \frac{k'}{k}d = \frac{1}{3} \times 4 \times 10^{-6} = 1.33 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

故此光栅总缝数 N 为 10 000 条,光栅常数 d 为 $4 \times 10^{-6} \text{ mm}$,狭缝宽度 a 为 $1.33 \times 10^{-6} \text{ mm}$.

§ 15.9 X射线的衍射

一、X射线的衍射

X射线是德国实验物理学家伦琴(W. K. Rontgen, 1845—1923)在1895年发现的,所以X射线又称为伦琴射线.产生X射线的实验装置如图15.41所示.在一个真空管内,K是发射电子的热阴极,A是由钨、钨或铜等金属制成的阳极,也称对阴极.两极之间加有数万伏的高电压,使热阴极射出的电子在强电场作用下被加速,高速电子撞击阳极产生X射线.

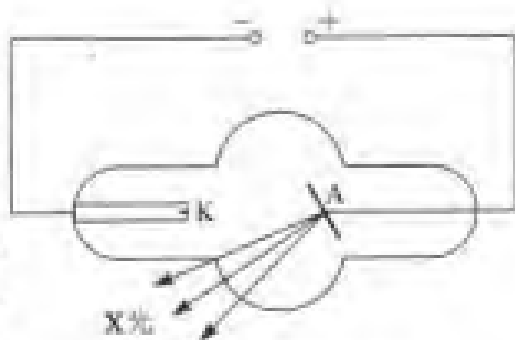


图 15.41 X射线管

X射线在本质上与可见光一样是电磁波,但它的波长很短,约在 0.01 nm 到 10 nm 之间.既然X射线是电磁波,就应该有干涉和衍射等现象,但是由于它的波长非常短,用普通的光栅观察不到其衍射现象,也无法用机械方法制造出适用于X射线衍射的光栅.

1912年德国物理学家劳厄(M. V. Laue, 1879—1960)提出,晶体是由一组有规则排列的微粒组成的,各微粒之间的间隔与X射线波长的数量级相同,它或许能构成一种适合于X射线衍射用的三维空间光栅.据此劳厄进行了实验,并成功地获得了X射线的衍射图样,从而证实了X射线是电磁波,同时也证实了晶体内原子是等间隔排列的.劳厄的实验装置如图15.42(a)所示.图中 PP' 是带有小孔的铅板,C为晶体,E为照相底片.实验时X射线通过铅板 PP' 上的小孔投射到薄晶体片上,在照相底片上发现了衍射形成的衍射斑点,此斑点又称劳厄斑点,如图15.42(b)所示.

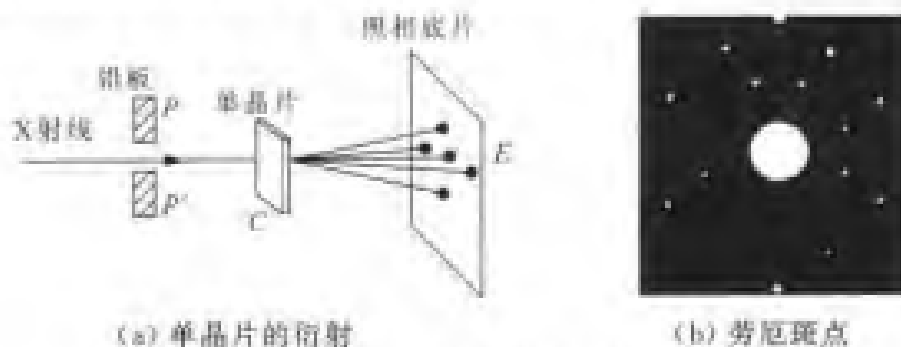


图 15.42 X射线衍射

二、布拉格公式

劳厄通过实验获得了 X 射线的衍射图样,但在进行分析时涉及到了空间光栅,定量分析十分复杂.1931 年英国物理学家布拉格父子(W. H. Bragg, 1862—1942 和 W. L. Bragg, 1890—1971)提出了一种新的研究方法,即把 X 射线衍射图样看作是由 X 射线对晶体每一个点阵平面组的相干反射形成的,此方法的原理和定量计算都较为简单,布拉格父子把空间点

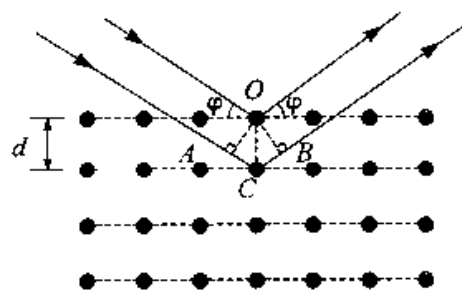


图 15.43 布拉格反射

阵简化,想象晶体是由一系列平行的晶面(即原子层)组成的,如图 15.43 所示.设各晶面之间的距离为 d ,当一束波长为 λ 的单色平行 X 射线以掠射角 φ 入射到晶面时,一部分被表面晶面散射,其余的被晶体内部的晶面散射,在符合反射定律的方向上射线的强度最大.由图可得,相邻两晶面间反射光线的光程差为

$$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d\sin\varphi$$

那么,各层散射射线干涉加强形成亮点的条件为

$$2d\sin\varphi = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

上式称为布拉格公式.

晶体中除了平行于晶体表面的一组晶面外,还有许多取向不同的同组晶面,如图 15.44 所示, aa_1 为一组晶面, bb_1 和 cc_1 为另外两组晶面等等.当 X 射线入射到晶体表面时,对于不同的各组

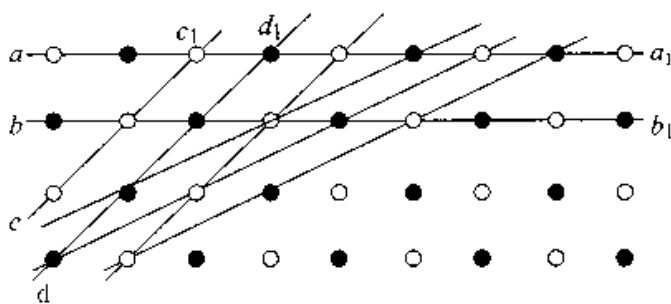


图 15.44 晶体中不同取向的晶面组

晶面,掠射角 φ 和晶面间的距离 d 都不相同,所以不同波长的 X 射线只有满足布拉格公式的部分 X 射线才可能干涉加强,在照相底片上形成劳厄斑点.

X 射线衍射的应用主要在以下两个方面:一是已知晶面间距离 d ,测出 X 射线衍射的掠射角 φ ,由布拉格公式可计算出 X 射线的波长,从而研究 X 射线谱,进而研究原子的结构.另一方面,若用波长已知的 X 射线照射某种晶体的晶面,由掠射角 φ 可以推算出晶面间距 d ,由此可以研究晶体的结构.这两方面的研究在科学和工程技术上有着广泛的应用.

§ 15.10 光的偏振

前面分别讨论了光的干涉和衍射,这两种现象说明了光的波动性,但不能说明光波就是横波.也就是说,不管是横波还是纵波,都可以产生干涉和衍射现象.而光的偏振现象有力的证实了光波是横波.

一、自然光和偏振光

光波是电磁波,光波的振动矢量 E (又称电矢量或光矢量) 与光的传播方向垂直,因此光波是横波.光波是横波只说明振动矢量 E 与光的传播方向垂直,在与传播方向垂直的平面内还可能有不同的状态,可在此平面内取任意方向.把振动矢量 E 对于光传播方向不具有对称性,叫做偏振.因为纵波的振动方向对于其传播方向永远是对称的,因此偏振是横波区别于纵波的一个明显标志.如果光矢量始终在与传播方向垂直的平面内某一确定的方向振动,这种光称为线偏振光.通常将光矢量的振动方向和光的传播方向组成的平面称为振动面,显然线偏振光的光矢量始终保持在固定的平面内,所以线偏振光又称为平面偏振光.

一个原子(或分子)每次发光所发出的光波列的振动矢量具有一定的方向,可以认为是线偏振光,但是,普通光源发出的光是由光源中大量的原子(或分子)发出的独立光波列组成的,这些光波列持续的时间很短,它们的初相位和振动方向是无规则随机变化的,所以它们朝各个方向振动的几率相同,即光的振动矢量在各个方向是对称分布的,振幅也相等,这种光称为自然光,它是非偏振的.普通光源发出的光都是自然光.自然光的特性可用图

15.45 形象表示.

我们可以把自然光分解为两个互相垂直且振幅相等的独立振动,两者之间没有恒定的相位关系,各自的光强等于自然光光强的一

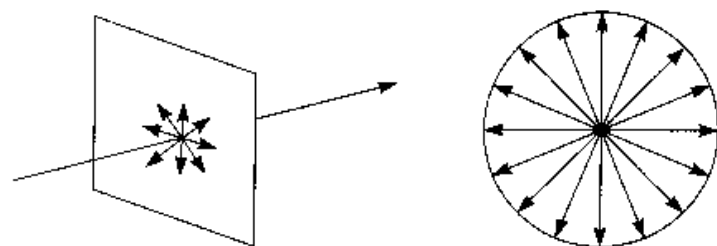


图 15.45 自然光光振动矢量的分布

半.也就是把自然光分解成两束振动方向相互垂直、振幅相等的相互独立的线偏振光,两线偏振光光强各为自然光光强的一半.自然光常用如图 15.46 所示的方法表示,图中用短线表示在纸面内的光振动,用小点表示垂直于纸面的光振动,它们都垂

直于光的传播方向. 对自然光, 小点和短线做等距分布, 表示没有那个方向的光振动更占优势.

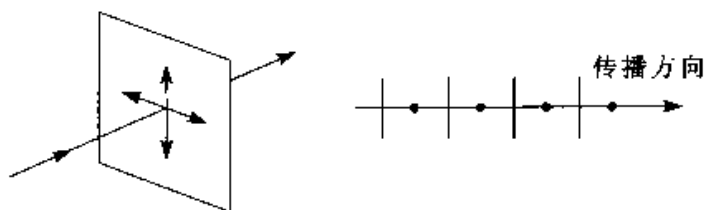


图 15.46 自然光的表示

如果两独立分振动的振幅不相等, 而是在一个方向上大, 在另一个

方向上小, 但不为零, 这种光称为部分偏振光, 部分偏振光的表示方法如图 15.47 所示, 图 15.47(a) 表示的部分偏振光在纸面内的光振动较强, 图 15.47(b) 表示的部分偏振光在垂直于纸面方向上的光振动较强. 同理, 线偏振光的表示方法如图 15.48 所示, 图 15.48(a) 表示振动方向在纸面内的线偏振光, 图 15.48(b) 表示振动方向垂直纸面的线偏振光. 通常把线偏振光和部分偏振光简称为偏振光.

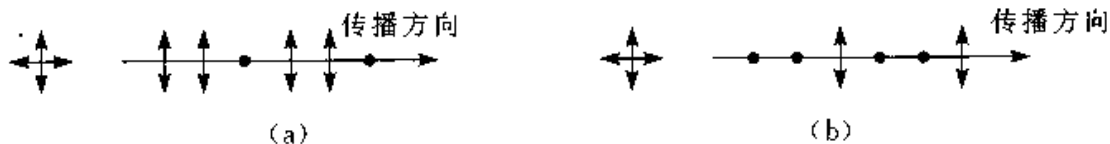


图 15.47 部分偏振光的表示

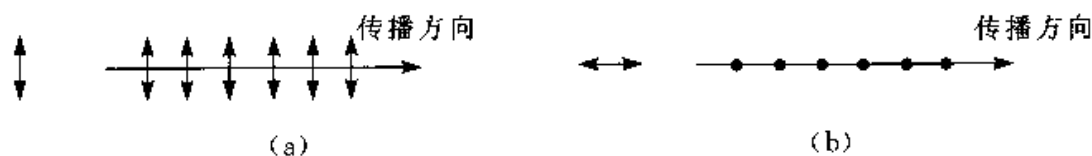


图 15.48 线偏振光的表示

二、起偏和检偏

在光学实验中发现, 某些晶体如电气石, 它只能让某个方向的光振动通过(有少量吸收), 而吸收与该方向垂直的光振动(有少量透射), 这种性质称为晶体的二相色性. 利用晶体的二相色性可以把自然光两个相互垂直的振动分量中的一个完全或大部分消除, 进而获得偏振光. 从自然光获得偏振光的过程称为起偏, 产生起偏作用的光学元件称为起偏器. 偏振片是一种常用的起偏器, 它是由透明材料涂上一层定向排列的二向色性晶体制成的. 偏振片只能透过沿某个方向的光矢量, 把这个透光方向称为偏振片的偏振化方向或透振方向.

两个平行放置的偏振片 P_1 和 P_2 , 它们的偏振化方向用一组平行线表示, 如图 15.49 所示. 当自然光垂直入射到偏振片 P_1 时, 透过 P_1 的光成为线偏振光, 其振动方向与 P_1 的偏振化方向相同, 强度为入射自然光强度的一半, 此时称偏振片 P_1 为起偏

器. 透过 P_1 的线偏振光继续入射到偏振片 P_2 上, 如果 P_2 与 P_1 的偏振化方向相同, 则透过 P_2 的光强最强, 如图 15.49(a) 所示. 如果 P_2 与 P_1 的偏振化方向正交, 则光强为零, 称为消光现象, 如图 15.49(b) 所示. 将偏振片 P_2 以光的传播方向为轴慢慢转动, 可以观察到透过 P_2 的光强周期

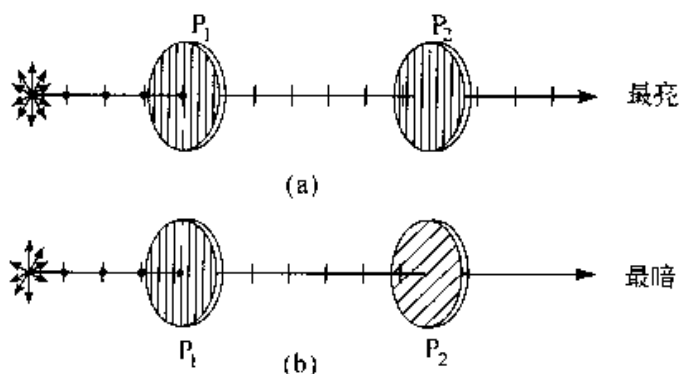


图 15.49 偏振片用作起偏器及检偏器

性的变化. 如果入射到偏振片 P_2 上的光是部分偏振光, 此时旋转 P_2 , 则透过 P_2 的光强也要发生由弱到强或由强到弱的变化, 但不会出现光强为零的情况. 可以看出, 偏振片 P_2 可用来确定入射到其上的光的偏振状态, 这个过程称为检偏, 偏振片 P_2 为检偏器.

三、马吕斯定律

线偏振光通过转动的检偏器时, 光强会连续变化, 那么入射的线偏振光的强度 I_1 与通过检偏器后的透射光强度 I_2 之间有何关系? 马吕斯 (E. L. Malus, 1775—1812, 法国物理学家) 通过研究得出了著名的马吕斯定律: 在不考虑吸收和反射的情况下, 透射光的光强 I_2 与入射的光强 I_1 满足

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

式中的 α 是入射偏振光的振动方向与检偏器偏振化方向之间的夹角.

马吕斯定律证明如下:

如图 15.50 所示, 起偏器 P_1 与检偏器 P_2 偏振化方向间的夹角为 α , E_1 表示入射线偏振光光矢量的振幅, E_2 表示透过偏振片 P_2 的光矢量的振幅. 将入射线偏振光的

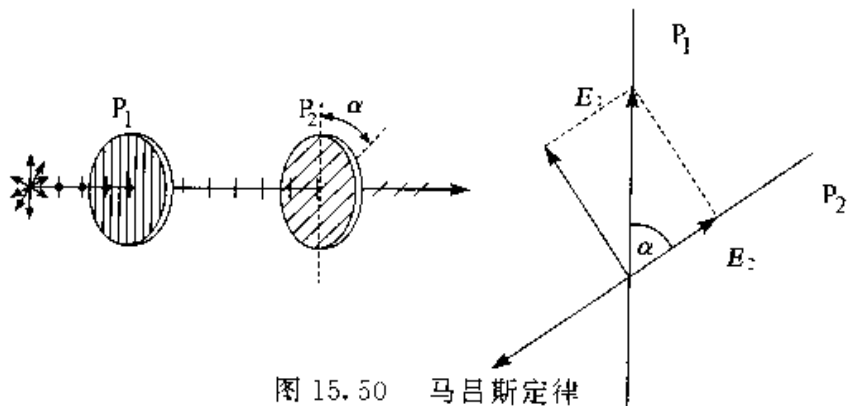


图 15.50 马吕斯定律

光振动分解为平行于 P_2 偏振化方向和垂直于 P_2 偏振化方向的两个分振动,显然只有平行分量可以透过 P_2 ,所以

$$E_2 = E_1 \cos \alpha$$

光的强度正比于振幅的平方,因此有

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E_2^2}{E_1^2} = \cos^2 \alpha$$

即

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

由上式可得 $\alpha = 0^\circ$ 或 180° 时, $I_2 = I_1$, 光强最大,

$\alpha = 90^\circ$ 或 270° 时, $I_2 = 0$, 光强最小.

例 15-16 自然光和线偏振光的混合光束通过一偏振片时,随着偏振片以光的传播方向为轴转动,透过的最大光强与最小光强之比为 6:1,求入射光中自然光和线偏振光的强度之比.

解 设入射光中自然光与线偏振光光强分别为 I_1 和 I_2 ,通过偏振片后的光强分别为 I'_1 和 I'_2 ,则

$$I'_1 = \frac{1}{2} I_1, \quad I'_2 = I_2 \cos^2 \alpha$$

由题意可知, $\alpha = 0$ 时,光强最大,即

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_1 + I_2$$

$\alpha = 90^\circ$ 时,光强最小,即

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_1$$

又 $I_{\max} = 6I_{\min}$, 即 $\frac{1}{2} I_1 + I_2 = 6 \times \frac{1}{2} I_1$

所以 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{2}{5}$

即入射光中自然光和线偏振光的光强之比为 2:5.

§ 15.11 双折射

一、双折射的寻常光和非常光

一束光由一种介质进入另一介质时,在介质面上产生的折射光通常只有一束.

如把一块普通玻璃片放在报纸上,通过玻璃片看到的是一个字成一个象。但是,如果改用透明的方解石(CaCO_3 的天然晶体)晶片放到报纸上,却看到一个字有两个象,如图 15.51 所示,说明光进入方解石晶体时,一束光分解成两束折射光,它们沿不同方向折射,这种现象称为**双折射现象**。双折射现象是由于晶体的各向异性造成的。除立方系晶体(如岩盐)外,光线进入一般晶体时也会发生双折射现象。

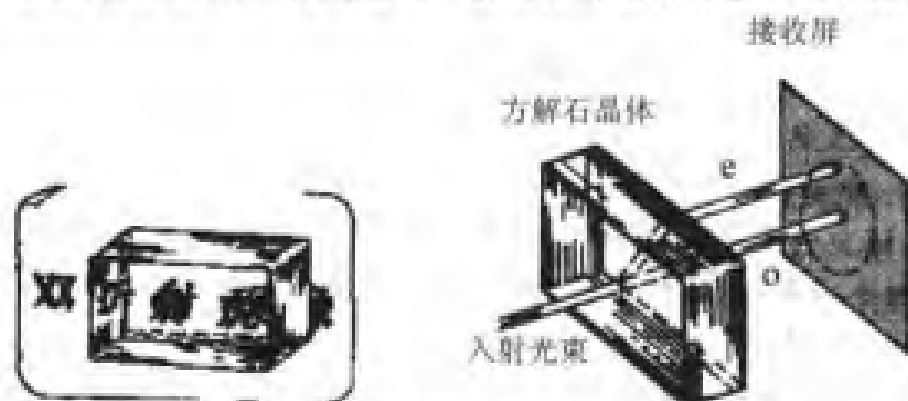


图 15.51 方解石晶体双折射

实验表明,在双折射现象中,其中一束折射光遵守折射定律,称为**寻常光**,通常用 o 表示,简称 o 光;另一束折射光不遵守折射定律,其折射率随入射角 i 的改变而改变,即 $\frac{\sin i}{\sin r}$ 的值不是恒量,该光束一般不在入射面内,该光束称为**非常光**,通常用 e 表示,简称为 e 光。寻常光和非常光如图 15.52 所示,因为光在介质中的传播速度和折射率有关,所以双折射现象说明 o 光在晶体中各方向的传播速度相同,而 e 光在晶体中各方向的传播速度不同。

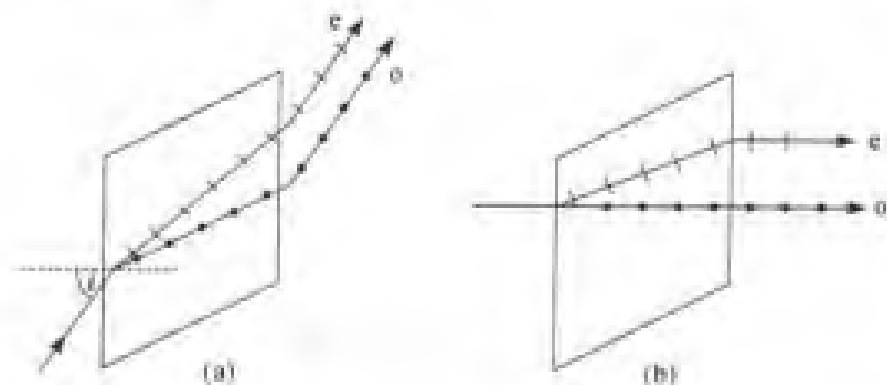


图 15.52 寻常光线和非常光线

实验还发现,当光沿某一特殊方向入射到方解石晶体时,寻常光和非常光不再

分开,不产生双折射现象,在这一方向上,寻常光和非常光的折射率相等,光的传播速度也相等,这一特殊方向称为晶体的光轴.如图 15.53 所示,天然方解石晶体是六面棱体,有八个顶点,其中有两个特殊的顶点 A 和 B ,相交于 A 、 B 两点的棱边之间的夹角是各为 102° 的钝角.它的光轴方向可以按如下的方法来确定:从三个钝角相会合的任一顶点(A 或 B)引出一条直线,使它和晶体各邻边成等角,这一直线便是晶体的光轴方向.需说明的是,光轴仅表示晶体内的一个方向,因此晶体内任何一条与上述光轴方向平行的直线都是晶体的光轴.

有些晶体只有一个光轴方向,称为单轴晶体,如方解石,石英等.有些晶体有两个光轴方向,称为双轴晶体,如云母,硫磺等.在晶体中,把包含光轴和晶体表面法线的平面称为晶体的主截面,把包含光轴和任一折射光线的平面称为该光线的主平面.由 o 光和光轴所组成的平面,就是 o 光的主平面;由 e 光和光轴组成的平面称为 e 光的主平面.用检偏器观察 o 光和 e 光,它们都是线偏振光, o 光的振动总是垂直于自己的主平面, e 光的振动总是平行于自己的主平面.通常,因为 e 光不一定

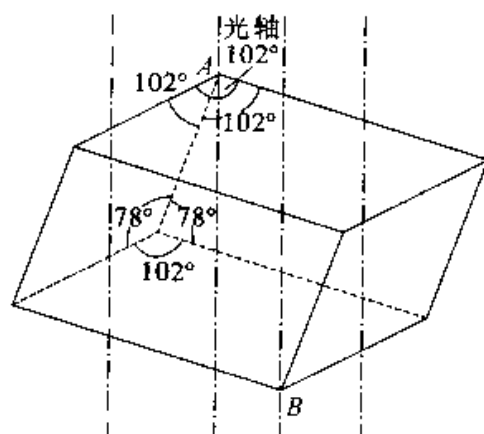


图 15.53 晶体的光轴

在人射面内,所以 o 光和 e 光的主平面并不重合.但是,当入射光线在晶体的主截面内时, o 光和 e 光的主平面与主截面重合, o 光和 e 光振动方向垂直,也就是说,让自然光以特定方向入射到晶体时,利用晶体双折射现象,可以得到振动方向互相垂直的两束线偏振光.

二、尼科耳棱镜

自然光通过双折射晶体能够得到振动方向垂直的两束线偏振光,因此可以利用双折射晶体制造起偏器或检偏器,但天然晶体的厚度较小,因而由其得到的两束偏振光分得并不是很开,实用价值不大.为此,人们研制出许多偏振棱镜,以获得偏振光.如尼科耳(Nicol)棱镜、格兰—傅科(Glan—Foucault)棱镜等.尼科耳棱镜是一种应用较为广泛的偏振光棱镜,它是尼科耳(W. Nicol, 1768—1851, 苏格兰物理学家)于 1828 年首先创制的,它利用双折射现象,将自然光分成 o 光和 e 光,然后利用反射把 o 光反射到棱镜侧壁上,只让 e 光通过棱镜,从而获得振动方向固定的线偏振光.

尼科耳棱镜是将两块根据一定要求加工后的方解石棱镜用加拿大树胶粘合在一起的斜长方柱形棱镜,其结构如图 15.54(a) 所示.当自然光入射到棱镜的一个端面后,分成 o 光和 e 光,如图 15.54(b) 所示,加拿大树胶的折射率 $n = 1.550$,介于方解石对 o 光的折射率 $n_o = 1.658$ (晶体对 o 光的折射率 $n_o = \frac{c}{v_o}$,由于 o 光在各个方向的传播速度相同,所以 n_o 是由晶体材料确定的常数,与方向无关)和对 e 光的主折射率 $n_e = 1.486$ (定义 e 光的主折射率 n_e 为真空中光速 c 与 e 光沿垂直于光轴方向传播时的速率 v_e 之比,即 $n_e = \frac{c}{v_e}$.e 光在其它方向上的折射率介于 n_o 和 n_e 之间)之间,当 o 光射到树胶层时,其入射角(77°)已超过了临界角(69.2°),o 光将发生全反射不能穿过树胶层,结果被涂黑的侧面 CN 吸收.至于 e 光,沿图中方向传播时折射率并不等于 n_e ,但仍小于树胶的折射率,是由光疏介质射向光密介质,不会发生全反射,最终 e 光大部分能透过树胶层并从另一棱镜射出.由于光轴位于此平面内,与 AC 成 48° 角,所以 e 光的主平面与主截面重合,因此射出的线偏振光的振动方向平行于主截面.

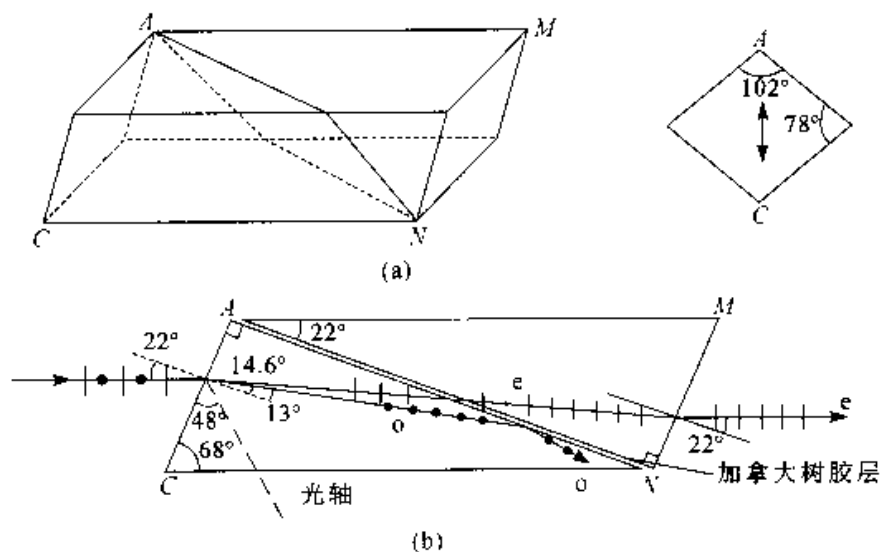


图 15.54 尼科耳棱镜

尼科耳棱镜既可用做起偏器,也可用做检偏器.如图 15.55 所示,尼科耳棱镜 N_1 用做起偏器,尼科耳棱镜 N_2 用做检偏器.图 15.55(a) 所示的是两棱镜的主截面间的夹角 $\alpha = 0$ 的情况,此时入射的自然光经过 N_1 后,透射出的线偏振光也能够通过 N_2 ,因而在其右端可观察到最亮的光.若把 N_2 以入射光为轴旋转 90° ,即此时 $\alpha = 90^\circ$,如图 15.55(b) 所示,这时通过 N_1 的线偏振光进入 N_2 后,对 N_2 而言就是垂直于其主平

面振动的 o 光,因而被 N_2 偏折而吸收,在 N_2 的右端并无光透射出,为最暗.由以上分析可知,如果把尼科尔棱镜 N_2 以光传播方向为轴旋转一周,在此过程中, N_2 的右端可观察到两次最亮和两次最暗周期性变化的情况.由此方法可检验入射到 N_2 的光是否是偏振光.

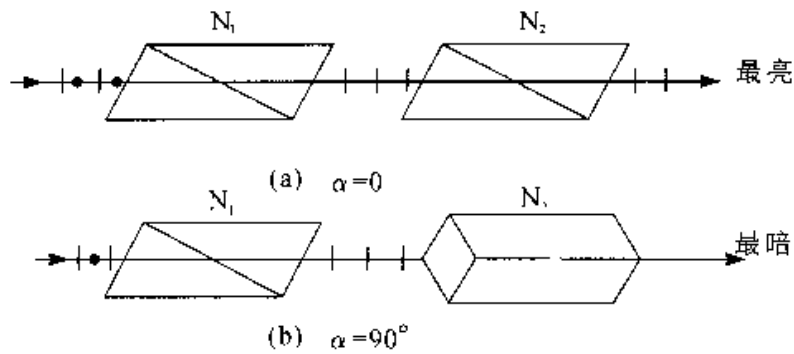


图 15.55 尼科耳棱镜的起偏与检偏

由尼科棱镜可获得振动方向固定的线偏振光,但其出射光与人射光并不在一条直线上,对实际使用带来不便,另外,尼科耳棱镜所使用的粘合剂——加拿大树胶对紫外线是不透明的,因而其使用范围也受到限制.格兰—傅科棱镜是尼科耳棱镜的改进型,其构造如图 15.56 所示,将一块方解石晶体加工成直角长方体,再将其一分为二成两个楔形,切

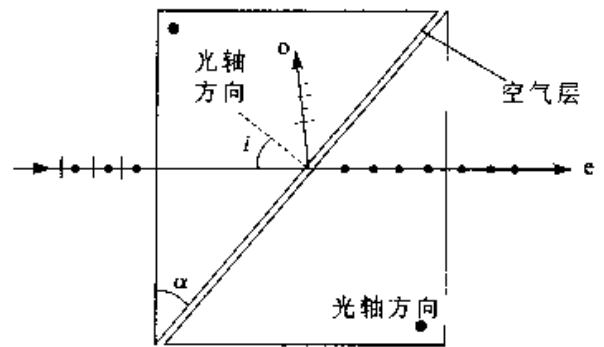


图 15.56 格兰—傅科棱镜

开的两个楔形不像尼科耳棱镜那样用加拿大树胶粘合,而是代以如图所示的空气层.两楔形晶体的光轴均垂直于纸面.当光垂直于棱镜的一个端面入射时,由于 o 光和 e 光对空气层的临界角分别为 $37^{\circ}6'$ 和 $42^{\circ}16'$,因而若使如图所示棱镜的顶角 α 介于这两个临界角之间,那么光线入射到空气层的人射角 i 就介于这两个值之间,因而可使 o 光发生全反射,而仅仅只有 e 光透射.如此用格兰—傅科棱镜得到的出射光和人射光(e 光)就在一条直线上了,另外,格兰—傅科棱镜也可用于对紫外线的研究.

除以上两种棱镜之外,还有沃拉斯特(Wollaston)棱镜和洛匈(Rochon)棱镜,它们是由光轴相互垂直的两块方解石直角棱镜粘合而成的.利用这两种棱镜也可获得两束分的较开的线偏振光,它们都是很好的偏振光分束元件.

思考题

15-1 若用两个细灯丝代替杨氏实验中的双狭缝,可否看到明暗相间的干涉条纹?为什么? 15-2 为什么窗玻璃(介质板)在日光照射下我们观察不到干涉条纹?

15-3 在杨氏双缝干涉实验中,若做如下一些变动时,接收屏上的干涉条纹将如何变化?

- (1) 将波长为 589.3 nm 的钠黄光换成波长为 632.8 nm 的氦氖激光;
- (2) 将整个装置浸入水中;
- (3) 将双缝(S_1 和 S_2) 的间距 d 增大;
- (4) 将接收屏向双缝屏靠近;
- (5) 在双缝之一的后面放一折射率为 n 的透明薄膜.

15-4 如图 15.57 所示,由相干光源 S_1 和 S_2 发出波长为 λ 的单色光,分别通过两种介质(折射率分别为 n_1 和 n_2 ,且 $n_2 > n_1$),射到这两种介质分界面上的一点 P . 已知两光源到点 P 的距离均为 r . 问这两条光线到达 P 点的几何路程是否相等?光程是否相等?光程差是多少?

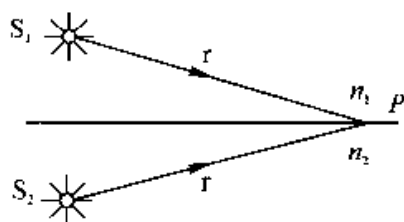


图 15.57

15-5 为什么白光产生的双缝干涉条纹比单色光产生的干涉条纹数目少?

15-6 如果两束光是相干光,在这两束光相遇处总光强如何计算?如果两束光是不相干的,总光强又如何计算?(分别以 I_1 和 I_2 表示两束光的光强)

15-7 为什么刚吹起的肥皂泡(很小时)看不到有什么彩色?当肥皂泡吹大到一定程度时,会看到有彩色图案,而且这些彩色图案随着肥皂泡的进一步增大而改变,请解释此现象.当肥皂泡大到将要破裂时,彩色图案消失而呈现黑色,为什么?

15-8 何谓等倾条纹?何谓等厚条纹?采用什么装置可观察到这两类条纹?

15-9 在计算由增透膜产生的光程差是,并没有加上半波损失,为什么?

15-10 单色光垂直照射空气劈尖时,观察到的条纹宽度为 $b = \frac{\lambda}{2\theta}$,则相邻两暗条纹所在处劈尖薄膜的厚度差为多少?如用折射率为 n 的物质构成劈尖,条纹宽

度将如何变化?相邻两暗条纹处劈尖的厚度差又为多少?

15-11 如图 15.58 所示,若空气劈尖的上表面向上缓慢平移[如图(a)],干涉条纹将怎样变化?若劈尖的上表面向右缓慢平移[如图(b)],干涉条纹又将怎样变化?若劈尖的劈尖角缓慢增大[如图(c)],干涉条纹又将发生怎样的变化?

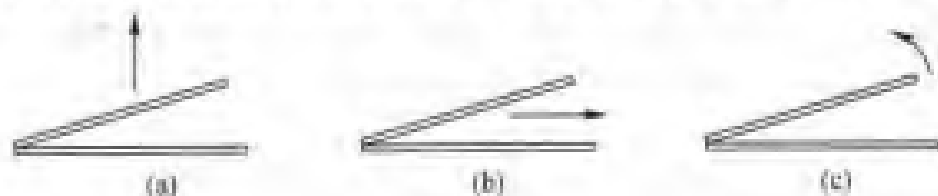


图 15.58

15-12 工业上常用光学平面验规(表面经过精密加工,作为标准的平板玻璃)来检验金属平面的平整程度。如图 15.59 所示,将验规放在待检平面上形成一空气劈尖,并用单色光照射,如待检平面上有不平之处,干涉条纹将发生弯曲。试判断图中 A 处待检平面是凸起还是凹下,凸起或凹下的最大尺度为多少?

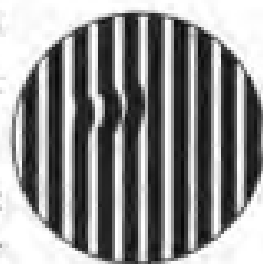


图 15.59

15-13 隐形飞机之所以很难被敌方发现,是由于飞机表面覆盖了一层电介质(如塑料或橡胶),从而使入射的雷达波反射甚微。试说明这层电介质是怎样减弱反射波的。

15-14 为什么劈尖干涉条纹是等宽的?牛顿环则随着条纹半径的增大而变密?

15-15 如图 15.60 所示,在牛顿环装置中,如果平玻璃板由冕牌玻璃($n = 1.50$)和火石玻璃($n = 1.75$)组成,透镜用冕牌玻璃制成,而透镜与平玻璃间充满二硫化碳($n = 1.62$)。试说明在单色光垂直照射下反射光的干涉图样是怎样的,请大致将其画出来。



图 15.60

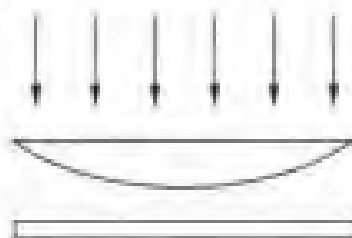


图 15.61

15-16 如图 15.61 所示,平凸透镜可以上下平移,若以单色光垂直照射,看见干涉条纹向中心移动,问透镜是向上移动还是向下移动?

15-17 在日常生活中,为什么声波的衍射比光波的衍射显著?

15-18 衍射的本质是什么?干涉和衍射有什么区别和联系?

15-19 在夫琅禾费衍射装置中,透镜的作用是什么?

15-20 一人手持一狭缝屏紧贴眼睛,通过狭缝注视远处的一平行于狭缝的线状白光光源,此人看到的衍射图样是菲涅耳衍射还是夫琅禾费衍射?

15-21 如图 15.62 所示,用波长为 λ 的单色光垂直照射狭缝 AB .

(1) 若 $\overline{AP} - \overline{BP} = 2\lambda$, 问对点 P 来说,狭缝 AB 可分成几个半波带,点 P 是明还是暗?

(2) 若 $\overline{AP} - \overline{BP} = 1.5\lambda$, 则点 P 的明暗又将怎样?对另一点 Q 来说,若 $\overline{AQ} - \overline{BQ} = 2.5\lambda$, 则点 Q 的明暗将如何?点 P 和点 Q 相比,哪一点更亮一些?为什么?

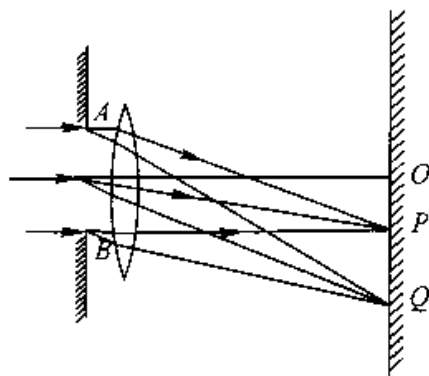


图 15.62

15-22 如图 15.63 所示,在单缝的夫琅禾费衍射中,若单缝处波阵面恰好被分成 4 个半波带.此时光线 1 与光线 3 是同相位的,光线 2 与 4 也是同相位的,为什么点 P 的光强不是极大而是极小?

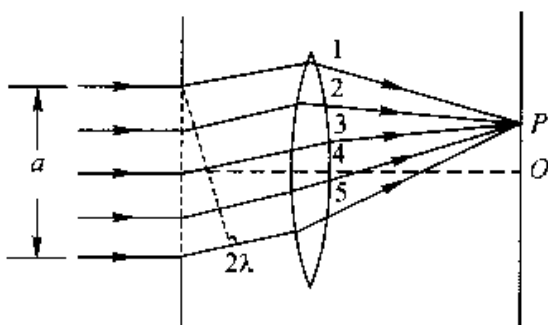


图 15.63

15-23 光栅衍射和单缝衍射有何区别?为何光栅衍射的明条纹特别明亮?

15-24 一台光栅摄谱仪备有三块光栅,它们分别为每毫米 1 000 条、600 条、90 条.

(1) 如果用此仪器测定 700—1 000 nm 波段的红外线的波长,应选用哪一块光栅?为什么?

(2) 如果用来测定可见光波段的波长,应选用哪一块?为什么?

15-25 X 射线为什么不能用光栅观察其衍射现象而要改用晶体的晶格做为光栅来观察?

15-26 光学仪器的分辨率是如何确定的?纸上两点至少离多远时我们用 25 cm 的明视距离观察时还能将它们区分开来?

15-27 自然光与线偏振光、部分偏振光有何区别?用哪些方法可以获得线偏

振光?

15-28 某光束可能是:(a) 自然光;(b) 线偏振光;(c) 部分偏振光. 如何通过实验加以区分?

15.29 如图 15.64 所示, M 为起偏器, N 为检偏器, 且使 M 和 N 的偏振化方向相互垂直. 今以单色自然光垂直入射于 M , 并在 M 和 N 之间插入另一偏振片 G , 它的偏振化方向与 M 和 N 均不相同. 问

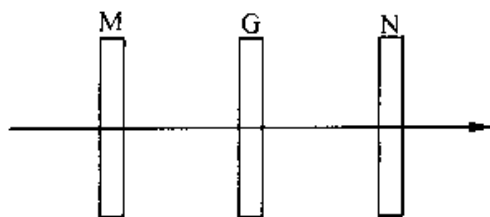


图 15.64

(1) 透过偏振片 N 的光强如何?

(2) 若将偏振片 G 以入射光线为轴转动一周, 试定性画出透射光强随转动角度变化的关系曲线.

习 题

15-1 钠黄光的波长为 589.3 nm . 试以一次发光延续时间 10^{-8} s 计, 计算一个波列中的波数.

15-2 在杨氏双缝实验中, 两缝间的距离是 0.30 mm , 用单色光垂直照射时, 在离缝 1.2 m 远处的接收屏上测得两个第 5 级暗条纹间的距离为 22.78 mm , 问入射光的波长为多少? 它是什么颜色的光?

15-3 在双缝干涉实验中, 两缝分别被折射率为 n_1 和 n_2 的透明薄膜遮盖, 二者的厚度均为 e . 波长为 λ 的平行单色光垂直照射到双缝上, 在接收屏中央处, 求两束相干光的相位差.

15-4 移动通信发射台发出的无线电波可能直接传到手机, 也可能经地面反射后传到手机, 这样在有些地方可能引起干涉相消而使信号减弱. 如图 15.65 所示, 设一手机和发射机分别位于高度都是 60 m 的高楼上, 而工作频率都是 98 MHz . 若引起干涉相消, 两楼间水平地面的最大(有限)宽度是多少?(无线电波在地面反射有半

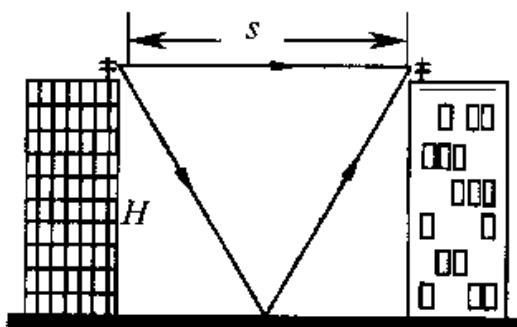


图 15.65

波损失)

15-5 如图 15.66 所示,在劳埃德镜实验中,狭缝光源 S_1 和它的虚象 S_2 在离镜左边 20cm 的平面内,镜长为 30 cm. 在镜的右边边缘处放置一毛玻璃光屏,若光源 S_1 的波长为 680 nm 的红光,且到镜面的垂直距离为 1.0 mm,计算镜面右边边缘到第一条明条纹中心的距离.

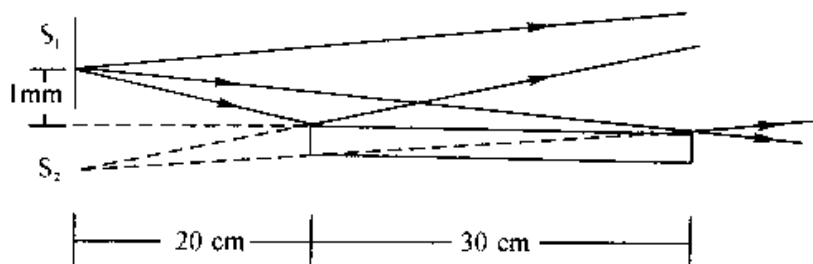


图 15.66

15-6 一双缝装置中的一个狭缝被折射率为 1.40 的薄玻璃片所遮盖,另一个狭缝被折射率为 1.70 的薄玻璃片所遮盖. 在两玻璃片插入以后,接收屏上原来的中央极大所在点,现变为第 5 级明条纹. 假定入射光波长 $\lambda = 480$ nm, 且两玻璃片厚度均为 d , 求 d 的值.

15-7 如图 15.67 所示,由点 S 发出的 $\lambda = 600$ nm 的单色光,自空气射入折射率 $n = 1.23$ 的透明物质,再折入空气. 若透明物质的厚度 $e = 1.0$ cm, 入射角 $\theta = 30^\circ$, 且 $\overline{SA} = \overline{BC} = 5$ cm, 求

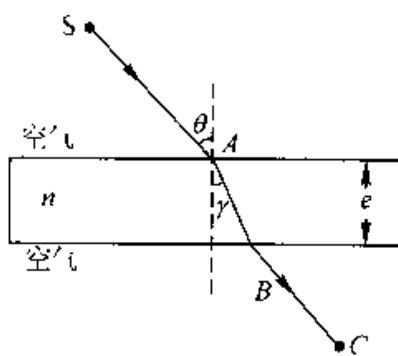


图 15.67

(1) 折射角 γ 为多少?

(2) 此单色光在这层透明物质里的频率、速度和波长各为多少?

(3) S 到 C 的几何路程为多少? 光程又为多少?

15-8 用白光作为双缝实验中的光源,两缝间距为 0.25 mm,接收屏与双缝距离为 50 cm,问在接收屏上观察到的第 2 级的彩色带有多宽?

15-9 白光垂直照射到空气中一厚度为 380 nm 的肥皂膜上. 试问肥皂膜正面呈现什么颜色? 肥皂膜背面呈现什么颜色? 设肥皂膜的折射率为 $n = 1.33$.

15-10 在空气中垂直入射的白光从薄油膜上反射,油膜覆盖在玻璃板上,在可见光光谱中观察到 500 nm 与 700 nm 这两个波长的光在反射中消失. 油膜的折射

率为 1.30, 玻璃的折射率为 1.50, 试求油膜的厚度.

15-11 在空气中垂直入射的白光从肥皂膜上反射, 在可见光谱中 630 nm 处有一干涉极大, 而在 525 nm 处有一干涉极小, 在极大与极小之间没有另外的极小, 假定肥皂膜的厚度是均匀的, 试问膜的厚度是多少? 已知肥皂膜的折射率为 1.33.

15-12 如图 15.68 所示, 用白光垂直照射厚度 e = 400 nm 的薄膜, 若薄膜的折射率为 $n_2 = 1.40$, 且 $n_1 > n_2 > n_3$, 问反射光中哪种波长的可见光得到加强?

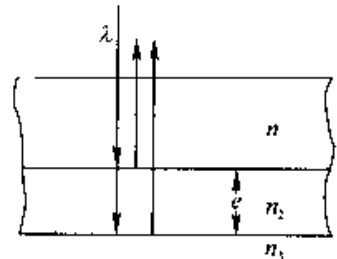


图 15.68

15-13 上题中, 若薄膜厚度 $e = 350$ nm, 且 $n_2 < n_1, n_2 < n_3$, 问:

- (1) 反射光中哪几种波长的光得到加强?
- (2) 透射光中哪几种波长的光会消失?

15-14 在折射率 $n_3 = 1.52$ 的照相机镜头表面涂有一层折射率 $n_2 = 1.38$ 的 MgF_2 增透膜, 若此膜仅适用于波长 $\lambda = 550$ nm 的光, 则膜的最小厚度为多少?

15-15 把一根钢丝夹在两块光学平玻璃板之间, 形成空气劈尖. 已知钢丝的直径 $D = 0.048$ mm, 钢丝与劈棱的距离 $L = 120$ mm, 用波长为 632.8 nm 的单色平行光垂直照射劈尖装置, 求

- (1) 劈尖角是多少?
- (2) 相邻两明条纹间的距离是多少?
- (3) 在这 120 mm 内呈现出多少条明条纹?

15-16 如图 15.69 所示为干涉膨胀仪的示意图. 膨胀仪的套框是用热胀系数很小的石英制成, AB 为平板玻璃, 套框内放置一上表面被磨成稍微倾斜的待测样品 W , 这样在平板玻璃 AB 和样品 W 上表面之间形成一空气劈尖. 若用波长为 λ 的单色光垂直照射平板玻璃 AB , 则产生等厚干涉条纹. 测得在温度 t_0 时样品的长度为 l_0 , 温度升高到 t 时, 样品的长度增为 l , 在这一过程中, 视场中有 N 条干涉条纹移过. 忽略石英套框的长度变化, 求证待测样品的热

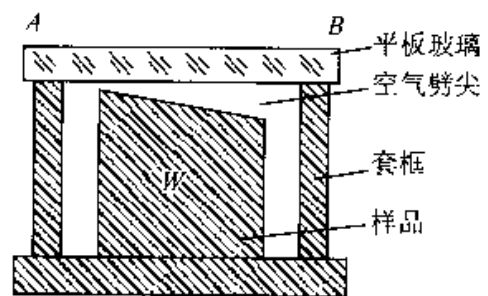


图 15.69

膨胀系数 β 为 $\beta = \frac{N\lambda}{2l_0(t-t_0)}$. (提示 $\beta = \frac{l-l_0}{l_0} \cdot \frac{1}{t-t_0}$)

15-17 制造半导体元件时,常常要精确测定硅片上二氧化硅薄膜的厚度,这时可把二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉,使其形成劈尖,利用等厚条纹测出其厚度.已知 Si 的折射率为 3.42, SiO_2 的折射率为 1.5,入射光波长为 589.3 nm,观察到如图 15.70 所示的 7 条暗纹.问 SiO_2 薄膜的厚度 e 是多少?

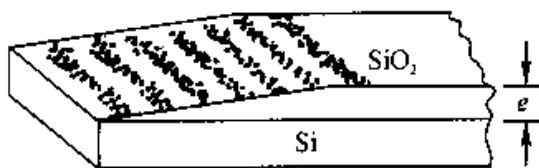


图 15.70

15-18 在利用牛顿环测未知单色光波长的实验中,当用波长为 589.3 nm 的钠黄光垂直照射时,测得第一和第四暗环的距离为 $\Delta l = 4.0 \times 10^{-3}$ m;当用波长未知的单色光垂直照射时,测得第一和第四暗环的距离为 $\Delta l' = 3.85 \times 10^{-3}$ m,求该单色光的波长.

15-19 在牛顿环实验中,当透镜与平板玻璃间为空气时,第 10 个亮环的直径为 1.40×10^{-2} m;当在其间充满某种均匀液体时(假定液体的折射率小于透镜和平板玻璃的折射率),第 10 个亮环的直径变为 1.27×10^{-2} m,试求这种液体的折射率.

15-20 在牛顿环装置中,透镜的曲率半径 $R = 40$ cm,用单色光垂直照射,在反射光中观察某一级暗环的半径为 $r = 2.5$ mm,现把平板玻璃向下平移 $d_0 = 5.0$ μm ,上述被观察的暗环半径变为何值?

15-21 利用牛顿环装置可测量凹曲面镜的曲率半径,把已知的平凸透镜的凸面放置在待测的凹面上,如图 15.71 所示.在两镜面之间形成空气层,可观察到环状的干涉条纹.



图 15.71

已知入射光的波长 $\lambda = 589.3$ nm,平凸透镜的半径为 $R_1 = 102.3$ cm,测得第 4 级暗环的半径 $r_4 = 2.250$ cm,求待测凹面镜的曲率半径 R_2 .

15-22 常用干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率.干涉仪光路图如图 15.72 所示,S 为光源,L 为聚光透镜, G_1 、 G_2 为两块等厚且相互平行的玻璃板, T_1 、 T_2 为等长的两个玻璃管,其长度均为 l .测量时,先将两玻璃管抽空,然后将待测气体缓慢充入其中一根玻璃管中,此过程中,在观察屏 E 处观察干涉条纹移动的数目,即可求得待测气体的折射率.设

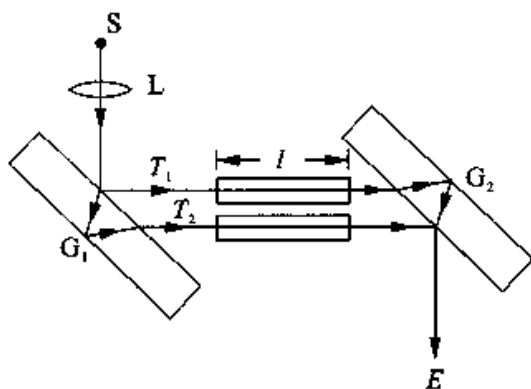


图 15.72

在某次测量中,将待测气体缓慢充入 T_2 玻璃管内,直到处于标准状态,此过程中在观察屏 E 处共看到有 98 条干涉条纹移过.所用光源波长为 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ (真空中), $l = 20 \text{ cm}$,求该气体在标准状态的折射率.

15-23 如图 15.73 所示,狭缝的宽度 $a = 0.60 \text{ mm}$,透镜焦距 $f = 0.40 \text{ m}$,有一与狭缝平行的接收屏放置在透镜的焦平面处.若以单色平行光垂直照射狭缝,则在屏上离点 O 为 $x = 1.4 \text{ mm}$ 的点 P 看到衍射明条纹.试求

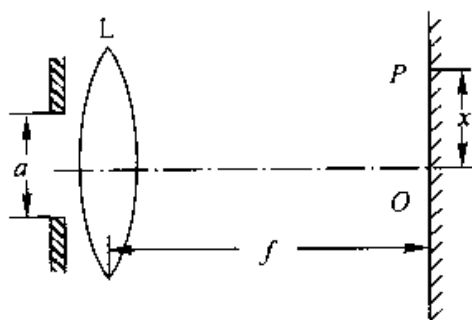


图 15.73

- (1) 该入射光的波长;
- (2) 点 P 衍射条纹的级数;
- (3) 从点 P 看,对该光波而言,狭缝处的波阵

面可分作半波带的数目.

15-24 一单色平行光垂直照射某一单缝,若其第三条明纹的位置正好和波长为 600 nm 的单色光垂直入射时的第二级明纹位置一样,求前一种单色光的波长.

15-25 已知单缝宽度 $a = 1.0 \times 10^{-1} \text{ m}$,透镜焦距 $f = 0.50 \text{ m}$,用 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$ 的单色平行光分别垂直照射,求(1)这两种光的第一级明纹离屏中心的距离,以及这两条明纹之间的距离.(2)若用每厘米刻有 1 000 条刻线的光栅代替这个单缝,则这两种单色光的第一级明纹分别距屏中心多远?这两条明纹之间的距离又是多少?

15-26 为了测定一光栅的光栅常数,用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的光垂直照射光栅.已知第一级明条纹出现在 30° 角的方向上,问此光栅的光栅常数多大?光栅 1 cm 内有多少条狭缝?第二级明条纹是否可能出现?为什么?

15-27 为测定一光栅的光栅常数,用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的单色光垂直照射此光栅,已知第一级明条纹出现在 38° 方向,试问此光栅的光栅常数为多少?第二级明条纹出现在什么角度?若使用此光栅对某单色光进行同样的衍射实验,测得第一级明条纹出现在 27° 的方向上,问此单色光的波长为多少?对此单色光,最多可看到第几级明条纹?

15-28 试设计一平面透射光栅,当用平行光垂直照射时,可以在衍射角 $\theta = 30^\circ$ 方向上观察到 600 nm 的第二级主极大,但却看不到 400 nm 的第三级主极大.请设计此光栅.

15-29 迎面开来的汽车上,两盏前灯相距 120 cm. 设夜间人眼瞳孔的直径为 5.0 mm, 入射光波长 $\lambda = 550 \text{ nm}$, 试问在夜间汽车离人多远的地方, 人的眼睛才能分辨出这两盏灯?(假设这个距离只取决于眼睛的圆形瞳孔处的衍射效应)

15-30 月球距地面约 $3.86 \times 10^5 \text{ km}$, 设月光波长可按 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 计算, 问: 在月球表面距离为多远的两点才能被地面上直径 $D = 500 \text{ cm}$ 的天文望远镜所分辨?

15-31 波长 $\lambda = 0.168 \text{ nm}$ 的平行 X 射线照射在食盐晶体的晶面上, 已知食盐晶体的晶格常数 $d = 0.28 \text{ nm}$, 试问当 X 射线与晶面分别成多大掠射角时, 可观察到第一、第二级反射主极大谱线?

15-32 使自然光通过两个偏振化方向相交 60° 的偏振片, 透射光强为 I_1 . 今在这两个偏振片之间插入另一偏振片, 它的偏振化方向与前两个偏振片偏振化方向均成 30° 角, 则透射光强 I_2 为多少?

15-33 一束光是自然光和线偏振光的混合, 当它通过一偏振片时发现透射光的强度取决于偏振片的取向, 其强度可以变化 5 倍, 求人射光中两种光的强度各占总入射光强度的几分之几.

第 16 章 相对论基础

20 世纪初,物理学上出现了两个伟大的成就,一个是爱因斯坦的相对论,它给出了高速运动(速度可与真空中的光速相比)物体的规律,并从根本上改变了许多世纪以来所形成的旧的时空概念,揭示了经典力学的局限性.另一个是普朗克的量子假说,量子论给出了微观粒子(分子、原子、电子等)的运动规律.

相对论主要是关于时空的理论,相对论时空观的建立是人们对物理现象认识的一个飞跃.它包括两部分内容:局限于惯性参照系的理论称为狭义相对论;推广到一般参照系的重力场的理论称为广义相对论.

本章主要论述狭义相对论,内容有伽利略相对性原理、绝对时空观、相对论的基本原理、相对论时空观以及相对论力学的一些结论.此外对广义相对论也作了简要介绍.

§ 16.1 狭义相对论产生的背景

一、绝对时空观的主要观点

牛顿力学的时空观是绝对的时空观.绝对时空观认为空间只是物质运动的“场所”,这个“场所”与其中的物质完全无关而独立存在,并且是永恒不变、绝对静止的.因此,空间的量度(如两点间的距离)就应当与参照系无关,是绝对不变的.此外,绝对时空观还认为,时间也是与物质的运动无关的,在永恒的、均匀的流逝着.因此,对于不同的参照系,应当用统一的时间($t' = t$)来讨论问题.就是说,对于一个参照系,两件事是同时发生的,那么从另一个参照系来看,也应该是同时发生的,并且一个持续的时间间隔,不论是从哪个参照系来看,都应该是相同的.

二、伽利略变换

经典力学中的伽利略变换是以绝对时空观为依据而建立的.设有两个惯性参考

系 S 和 S' , 在它们之上分别建立坐标系 $oxyz$ 和 $o'x'y'z'$, 使两坐标系相对应的坐标轴相互平行, 且 x 轴与 x' 相重合. 如图 16.1 所示. 设 S' 沿 x 轴正方向以恒定速度 v 相对 S 系运动, 并且 $t = t' = 0$ 时刻, 坐标原点 O 与 O' 重合. 本章后面讲到的 S 和 S' 系以及相对应的 $oxyz$ 和 $o'x'y'z'$ 坐标系定义都与此相同. 设空间任意一点 P 在 S 系中的时空坐标为 (x, y, z, t) , 它在 S' 系中的坐标为 (x', y', z', t') , 两坐标之间存在如下关系

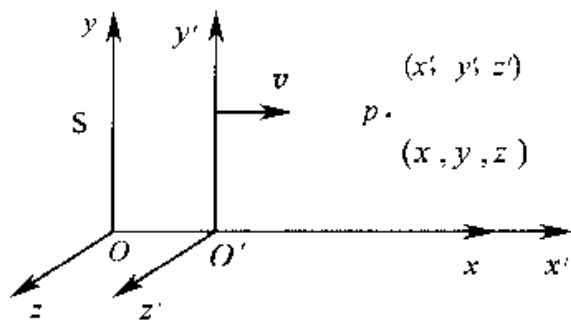


图 16.1 坐标变换

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (16-1)$$

式(16-1)所表示的就是 S 和 S' 系之间的伽利略坐标变换式.

从 S' 系到 S 系的伽利略坐标逆变换式为

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \right\} \quad (16-2)$$

把式(16-1)式对时间求一阶导数, 考虑到 $t' = t$, 可得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}$$

于是得速度变换公式为

$$\left\{ \begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z \end{aligned} \right. \quad (16-3a)$$

其中 u'_x, u'_y, u'_z 是点 P 对于 S' 系的速度分量, u_x, u_y, u_z 是点 P 对 S 系的速度分量. 式(16-3a)为点 P 在 S 和 S' 系中的速度变换关系, 叫做伽利略速度变换式. 其矢量形式为

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (16-3b)$$

\mathbf{v} 就是第一章相对运动中所述的牵连速度, \mathbf{u} 和 \mathbf{u}' 分别为点 P 在 S 和 S' 系的速度.

显然,上式表明,在不同的惯性系中质点的速度是不同的.

把式(16-3a)对时间求导数,就得到经典力学中的加速度变换法则

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad (16-4a)$$

其矢量形式为

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (16-4b)$$

上式表明,在惯性系 S 和 S' 中,点 P 的加速度是相同的,即在伽利略变换里,对不同的惯性系而言,加速度是个不变量.由于经典力学认为质点的质量是与运动状态无关的常量,所以由式(16-4)可知,在两个相互作用匀速直线运动的惯性系中,牛顿运动定律的形式也应是相同的,即有如下形式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$$

上述结果表明,当由惯性系 S 变换到惯性系 S' 时,牛顿运动方程的形式不变,即牛顿运动方程对伽利略变换式来讲是不变式.由此不难推断,对于所有的惯性系,牛顿力学的规律都应具有相同的形式.这就是牛顿力学的相对性原理.

在日常生活中,由于实践范围的限制,人们大量接触的是低速运动的物体,因而就会自觉地接受这种观点,认为绝对的时空观是理所当然的和自然而然的.但实验和实践证明,对高速运动的物体来说,这种观点是错误的,不符合客观实际.

三、狭义相对论产生的背景

19世纪后期,物理学对物质世界的认识基于两个假设:(1)原子论假设认为自然界一切物质是由原子和分子所组成的;(2)以太的假设,认为以太是一种特殊的弹性媒质,存在于原子之间的全部空隙(因而,也存在于整个宇宙之中),原子间的作用就是通过这种想象中的以太实现的.

当时一方面,从实验和理论上确认了光具有波动的性质;另一方面,麦克斯韦总结并发展了关于电磁学的实验定律,建立了统一的电磁场理论,他的理论集中地体现在麦克斯韦方程组中.就像牛顿定律是力学的基本规律一样,麦克斯韦方程组是电磁现象的基本规律,这个理论预言了电磁波的存在,并且把光波也纳入了电磁波的范围.但是,对电磁波和光波的本质,还停留在初期认识阶段,认为它们是类似机械波的弹性波,而传播这种波的弹性介质就是以太.

麦克斯韦理论指出电磁波的传播速度 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 与实验测出的光速值非常吻

合. 像对牛顿定律所做的那样, 用伽利略变换来考察麦克斯韦方程组, 也就是将麦克斯韦方程组从一个惯性系坐标变换到另一个惯性系坐标, 人们发现, 不同于牛顿定律, 麦克斯韦方程组对伽利略变换不具有不变性. 也就是说, 麦克斯韦方程组对各个惯性系并不等价. 这意味着, 如果伽利略变换是普遍适用的, 那么, 麦克斯韦方程组就只能对某个特定的惯性系是正确的. 人们认为, 这个特殊的惯性系应该是想象中的以太媒质. 既然麦克斯韦方程组只对以太是正确的, 那么, 理论指出的电磁波传播的速度 c (也就是光速) 是对以太参照系而言的. 按照伽利略速度变换, 电磁波或光相对其它惯性系的传播速度就不再等于 c 了.

依此推理, 似乎麦克斯韦理论允许绝对参考系存在. 如果能从实验证实以太的真实性, 绝对参考系就有了科学的依据.

假如以太是真实存在的, 地球应该在以太中运动. 欲证实以太的存在, 只要能测量出地球相对于以太的运行速度就可以了. 基于这种想法, 美国物理学家迈克耳孙 (A. A. Michelson, 1852—1931) 和莫雷 (E. W. Morley, 1838—1923) 设计了精巧的实验装置, 即迈克耳孙干涉仪.

设光速 c 是相对于以太的, 地球是相对于以太运动的惯性系, 那么, 根据伽利略速度变换, 在地球上沿不同方向考察光速就应该不同. 但迈克耳孙和莫雷实验结果却与预期相反, 没有得到光相对于地球沿不同方向会有速度差异的证据.

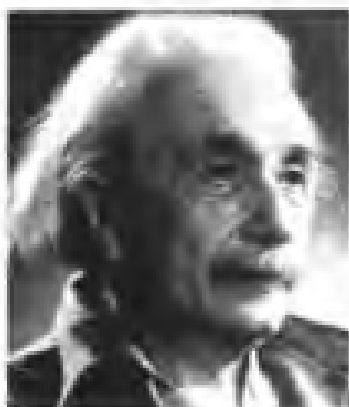
问题摆出来了: 一方面麦克斯韦方程组对伽利略变换不具有不变性, 而在理论上人们又承认绝对参照系的存在; 另一方面, 实验却否定了绝对参考系的存在. 经典物理理论与电磁现象的实验事实发生了尖锐的冲突, 使人迷惑不解. 著名物理学家开尔文 (Kelvin, 1824—1907) 在 1900 年元旦致词中, 将迈克耳孙—莫雷实验的否定结果称为漂浮在物理学天际的两朵乌云之一.

伴随着上述问题的解决, 诞生了狭义相对论.

§ 16.2 狭义相对论的基本原理

爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879—1955 年), 犹太人. 被誉为“20 世纪的牛顿”、“20 世纪最伟大的科学家”.

创新是爱因斯坦主要的科学思想. 他在普朗克能量量子假设的基础上, 于 1905 年



提出了光量子假说,成功地解释了光电效应的实验规律,为此,他荣获了1921年度的诺贝尔物理学奖.1916年提出自发辐射和受激辐射的概念,为现代激光技术奠定了理论基础.1924年提出了量子统计方法——玻色—爱因斯坦统计.在对时间、空间和物质运动的研究中,他否定了牛顿的绝对时空观,于1905年建立了狭义相对论,1915年创立了广义相对论,他用广义相对论研究整个宇宙的时空结构,开创了现代宇宙学.爱因斯坦始终不懈地追求把引力场与电磁场统一起来的研究,这些成就和科学思想深刻地影响着现代科学研究的进展.

一、狭义相对论基本原理

1. 光速不变原理

在真空中,光速总是等于恒定值 c ,它不依赖于惯性系之间的运动,他与观察者的运动无关.光速的值为

$$c = 2.997925 \times 10^8 \text{ m/s } (\approx 3 \times 10^8)$$

其实,光速不变乃是实验提供的客观事实,把它作为一条假设在于思考问题的角度发生了变化,即不应当先验性地把适用于低速情形的伽利略变换当作根据来讨论光速,而应当反过来,从光速不变这一事实出发,去建立正确的时空变换关系.

2. 相对性原理

物理定律在所有惯性系中都是相同的,即所有的惯性参照系都是等价的.按照爱因斯坦这一假设可知,描述物理现象的物理定律,在所有惯性参照系都应取相同的数学公式.不论在哪一个惯性系中做试验,都不能确定该惯性系的绝对运动,这就是说,对运动的描述只有相对性,绝对静止的参照系是不存在的.

需要注意的是,相对性原理是指物理定律的形式不随惯性系而变,但构成定律的各物理量之值则是随之而异的.

就是在看来这样简单而且最一般的两个假设的基础上,爱因斯坦建立了一套完整的理论——狭义相对论,把物理学推进到了一个新的阶段.由于在这里涉及的只是无加速运动的惯性系,所以叫狭义相对论,以别于后来爱因斯坦发展的广义相对论,在那里讨论了作加速运动的参考系.

二、洛伦兹变换

现在,我们由爱因斯坦的两个假设来导出洛伦兹变换,并由此导出相对论的速度变换法则(也叫速度的洛伦兹变换)

如图 16.2 所示, S 和 S' 是两个惯性系,且 S' 相对于 S 沿 x 方向以 v 做匀速直线运动. 当 S 和 S' 的原点 O 和 O' 恰好重合时,两惯性系同时开始计时,即此时刻 $t = t' = 0$. 假设就在此刻由原点处发出一个闪光信号,由光速不变原理,此信号在空间传播的速度,无论对 S 还是 S' 而言都应等于 c .

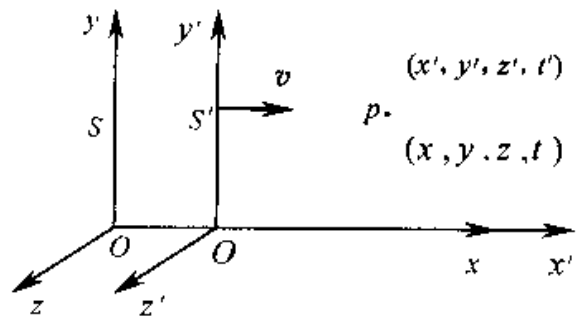


图 16.2 洛伦兹变换

当此光信号传播至空间某处时,此处

便从“无光”变成了“有光”,这在相对论中叫发生了一个事件. 对 S 系来说,此事件发生在信号传播了 t 时间后距离 O 点为 r 的地方,亦即此事件的时空坐标为 (x, y, z, t) ,由于光速为 c ,故此信号传播规律为

$$r = ct$$

式中

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

因而上式可由事件的时空坐标表示为:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

或

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (16-5)$$

然而,这一事件对 S' 系来说发生的时间则为 t' ,地点在离 O' 点为 r' 的地方. 这里要特别注意时间 t ,应认为它并不与 S 中的时间 t 相同. 因此,信号的传播规律为

$$r' = c't'$$

或用事件的时空坐标写为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (16-6)$$

(16-5) 式和 (16-6) 式分别是两惯性系中的光信号传播规律,他们的形式相同. 我们的任务就是既要找出一种新的时空变换关系,而又能保持这个方程式为不变式. 换言之,新的变换关系必须满足爱因斯坦相对性原理的要求,即满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2 t'^2 = 0$$

由于 S 与 S' 的相对运动发生在 x, x' 方向上, 所以

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

故上式可简化为

$$x^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 - c'^2 t'^2 \quad (16-7)$$

显然, 伽利略变换不能保证(16-7)式成立.

新的变换关系实质上就是确定光信号传至任一点时两参照系中的时空坐标间的关系. 对于 S 系的原点 O , 由 S 系来观察时, 无论在任何瞬时, $x = 0$. 由 S' 系来观察时, 在瞬时 t' 的坐标是 $x' = -vt'$ 或 $x' + vt' = 0$. 可见在空间同一点上, 数值 x 和 $x' + vt'$ 同时为零. 因此我们可以假设, 在任何瞬时 x 和 $x' + vt'$ 之间的一般关系为线性关系, 即

$$x = k(x' + vt') \quad (16-8)$$

式中 $k = k(v)$ 为一常数, 且 $k \neq 0$, 因为若 $k = 1$ 则就回到伽利略变换, 且明显不满足(16-7)式.

同理, 考虑 S' 系中的原点 O' 有

$$x' = k'(x - vt)$$

根据相对性原理, 这两个惯性系是等价的, 因此除了把 v 改成 $-v$ 之外, 上述两式应有相同的形式, 这就要求 $k' = k$ 于是

$$x' = k(x - vt) \quad (16-9)$$

把(16-9)代入(16-8), 得

$$\begin{aligned} x &= k^2(x - vt) + kv t' \\ t' &= kt + \frac{1 - k^2}{kv} x \end{aligned} \quad (16-10)$$

而 $x = ct, x' = ct'$, 把(16-9)和(16-10)代入 $x' = ct'$, 得

$$k(x - vt) = ckt + \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right)cx$$

由上式求解 x , 并与 $x = ct$ 相比较, 可得

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

其中

$$\beta = \frac{v}{c}$$

所以

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\t' &= k \left(t + \frac{1 - k^2}{k^2 v} x \right) = k \left(t + \frac{1 - \frac{1}{1 - \beta^2}}{\frac{v}{1 - \beta^2}} x \right) \\&= k \left(t + \frac{-\beta^2}{v} x \right) = k \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

从而得洛伦兹时空坐标变换式为

$$\left. \begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned} \right\} \quad (16-11)$$

同理,可得洛伦兹时空坐标的逆变换式为

$$\left. \begin{aligned}x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned} \right\} \quad (16-12)$$

对洛伦兹变换式,我们应当明确:

(1) 洛伦兹变换包括了伽利略变换,也就是说狭义相对论原理是伽利略相对原理的发展.当运动物体处于低速,即 $\frac{v}{c} \ll 1$ 时,根据洛伦兹变换式,显然,由 S 系到 S' 系,有

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

可见,在低速条件下,洛伦兹变换退化为伽利略变换(对 S' 系变换到 S 系也有同样的结论).说明洛伦兹变换是比伽利略变换更为普遍的坐标变换关系.这也说明任何新理论的成功,总是把旧理论的正确部分包含在其中.这就是哲学上的所谓扬弃而不是抛弃.

(2) 洛伦兹变换是光速不变原理的具体表达.

(3) 在洛伦兹变换式中 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 应为实数,且不能等于零.因此狭义相对论认为,任何运动物体的速度都不能大于光速(极限速度).

(4) 洛伦兹变换否定了旧的时空观,反映出一种新的时空观.洛伦兹变换给出了空间时间相互联系的具体形式,提示出时间和空间的量度和参照系的选取有关,说明孤立的时间和孤立的空间都是不存在的.它表明某一事件不能单独用空间坐标或单独用时间坐标来表达,而必须用四个时空坐标 (x, y, z, t) 或 (x', y', z', t') 来表达,这就是所谓的四维坐标概念.这就说明应当用一种新的时空观来代替经典力学的绝对时空观.总之,洛伦兹变换把时间、空间和物质运动之间的联系揭示了出来.

三、相对论的速度变换法则

相对论的速度变换法则亦称速度的洛伦兹变换.设在 S 系测得物体运动速度为 $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, 此处

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

在 S' 系测得物体运动速度为 $\mathbf{u}'(u'_x, u'_y, u'_z)$, 此处

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

对洛伦兹时空坐标变换式(16-11)进行微分,便有

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ dy' &= dy \end{aligned}$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

由此可得由 S 系到 S' 系的速度变换

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v dx}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \end{aligned} \right\} \quad (16-13)$$

式中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, 同理可得由 S' 系到 S 系的速度变换

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \end{aligned} \right\} \quad (16-14)$$

当 $u_x = c$ 时, $u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2} c} = c$, 这就说明光速不变。

当 $v \ll c$ 时, 式(16-13)退化为(16-3)式, 又回到伽利略速度变换。

例 16-1 假定一粒子在 $x'y'$ 平面内以 $u' = c/2$ 的恒定速度相对于 S' 系运动, 而且它的轨道同 x' 轴成 60° 角, 如果 S' 系沿 x 方向相对于 S 系的速度为 $v = 0.6c$,

试求由 S 系所确定的粒子的运动方程.

解 按题意, S' 系所确定的粒子的运动方程为

$$x' = u_x' t' = \frac{c}{2} \cos 60^\circ t'$$

$$y' = u_y' t' = \frac{c}{2} \sin 60^\circ t'$$

由洛伦兹变换有

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{2} \cos 60^\circ \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

即

$$x - 0.6ct = \frac{c}{2} \cos 60^\circ \left(t - \frac{0.6c}{c^2}x \right)$$

所以

$$x = 0.74ct$$

此外

$$\begin{aligned} y' = y &= \frac{c}{2} \sin 60^\circ \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{c}{2} \sin 60^\circ \frac{t - 0.6 \times 0.74t}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} \end{aligned}$$

所以

$$y = 0.30ct$$

例 16-2 火箭 A 和 B 分别以 $0.8c$ 和 $0.6c$ 的速度相对于地球向右和向左飞行, 求在火箭 A 上测得的火箭 B 的速度.

解 在本题中, 可把地球视为 S 系, A 为 S' 系, B 为运动物体, 则

$$v = 0.8c \quad u_x = -0.6c$$

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 - \frac{0.8c}{c^2} \times (-0.6c)} \\ &= -0.964c \end{aligned}$$

§ 16.3 狭义相对论的时空观

一、同时性的相对性

同一惯性系的同时性的判断依据在同一惯性系中,如果从 A 点 (x_1, y_1, z_1) 和 B 点 (x_2, y_2, z_2) 各发出一个光信号,这就构成了在不同地点发生的两个事件.当 AB 连线的中点 $C(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ 处,同时收到了这两个光信号,那么,我们才能合乎逻辑地认为,发生在 A 和 B 两处的两事件是同时的,否则就不同时.

不同惯性系中对两事件的观察情况如下:在经典力学中,同时性是绝对的与参照系无关.若在 S 系中两事件发生的时刻是相同的,即

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

这两件事便是同时事件.根据伽利略变换,在另一个参照系 S' 系中,由于 $t'_1 = t_1$ 及 $t'_2 = t_2$,因而

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 = 0$$

则在 S' 系看来也是同时发生的.

按相对论理论,同时性是相对的,它取决于参照系.若

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

则在 S 系看来是同时发生的,而

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$
$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

故

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$= \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16-15)$$

所以,若 (1) $x_2 - x_1 = 0$, 则 $\Delta t' = 0$

(2) $x_2 - x_1 \neq 0$, 则 $\Delta t' \neq 0$

也就是说,唯有 S 系中同一地点且同一时刻发生的两事件,在任何参考系中看都是同时发生的.

由上面的分析,我们还可以看出:如果在一个惯性系 S 中既不同时 ($\Delta t \neq 0$), 也不同地 ($\Delta x \neq 0$) 发生的两事件,若满足 $\Delta t - \frac{v}{c^2}(\Delta x) = 0$ 的条件,即 Δt 正好等于 $\frac{v}{c^2}(\Delta x)$, 则根据洛伦兹变换可得 $\Delta t' = 0$, 即以速度 v 作相对运动的另一个惯性系 S' , 观察者可看到是同时发生的.

注意,在相对论中,尽管同时性只有相对的定义,但由于光速是物体运动不可逾越的极限,因而事件的因果顺序决不会因参考系的不同而颠倒. 设在 S 系中, t 时刻在 x_1 处的质点, Δt 时间运动到 x_2 处. 根据洛伦兹变换

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

即

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

这里 $u \neq c$ 是质点运动的速度,因为 $u \neq c, v \neq c$, 所以 $\Delta t'$ 与 Δt 同号,有因果关系的事件,其先后顺序仍然是不可逆的.

二、长度收缩

如图 16.3 所示,设有两个观测者,从各自的惯性系 S 和 S' 对一刚性棒的长度进行测量. 已知棒沿 x, x' 轴放置,并对于 S' 系静止不动.

设 S' 系中的观测者测得棒两端点的坐

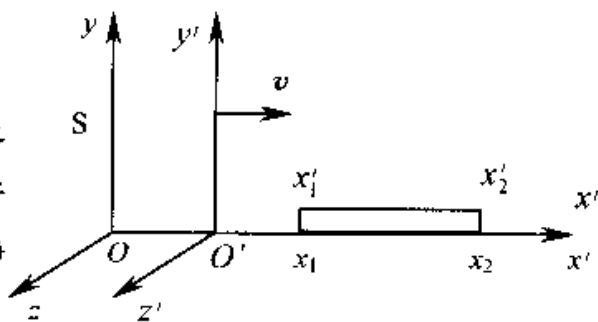


图 16.3 长度的收缩

标为 x'_1 和 x'_2 , 可知棒长为 $L_0 = x'_2 - x'_1$. 对 S 系中的观测者, 则必须在同一时刻 $t = \tau$ 测得该棒两端点的坐标, 设分别为 x_1 和 x_2 . 那么, 棒的长度即为 $L = x_2 - x_1$, 由洛伦兹坐标变换式, 有

$$x'_1 = \frac{x_1 - u\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - u\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

则

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - u\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - u\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

所以

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (16-16)$$

这就是说, 与棒有相对运动的观测者测得的棒的长度 L , 要比与此棒相对静止的观测者测得棒的长度 L_0 短一些.

由此可见, 长度的测量值与被测物体相对于观测者的运动有关. 观测者与被测物体相对静止时, 长度的测量值 L_0 为最大, 称此为该物体的固有长度. 观测者与被测物体有相对运动时, 长度的测量值 L 等于其固有长度的 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 倍, 即物体沿运动的方向缩短了. 这种收缩效应, 是 1892 年由洛伦兹和斐兹杰惹 (G. Fitzgerald) 为了解释迈克尔逊 - 莫雷实验的结果而各自独立地提出的假说, 一般也称为洛伦兹 - 斐兹杰惹收缩.

例 16-3 如图 16.4 所示, 设火箭上有一天线, 长 $l_0 = 1\text{m}$, 以 45° 角伸出火箭体外. 火箭沿水平方向以 $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ 的速度飞行. 问: 地面上的观测者测得这天线的长度与火箭的夹角各是多少?

解 设火箭相对于 S' 系静止, 自 S' 系 (即火箭上) 测的天线长度 $l' = 1\text{m}$, $\theta' = 45^\circ$, 故

$$l'_x = l' \cos \theta'$$

$$l'_y = l' \sin \theta'$$

设自地面 (S 系) 测的天线长度为 l , 夹角为 θ , 注意到收缩只沿运动方向即 x 方向

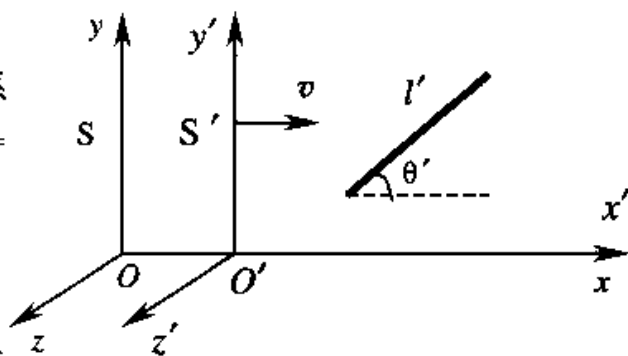


图 16.4

发生,有

$$l_x = l \cos \theta = l'_x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = l' \cos \theta' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$
$$l_y = l \sin \theta = l'_y = l' \sin \theta'$$

所以

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \left[\left(l' \cos \theta' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^2 + (l' \sin \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= l' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cos^2 \theta' = 0.625 \text{ m}$$

由

$$\tan \theta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{\tan \theta'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 2$$

得

$$\theta = 63^\circ 7'$$

三. 时间延缓

现在,考虑从 S 和 S' 两惯性系观察两个事件的时间间隔 Δt 和 $\Delta t'$ 之间的关系. 设一事件在 S' 系中的某点 $x' = \zeta$ 处发生,用固定在 S' 系中的时钟来量度,这事件发生于 t'_1 时刻;另一事件也在 $x' = \zeta$ 处发生于 t'_2 时刻,两者之间的间隔为 $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. 而用固定在 S 系中的时钟来量度时,前一事件是在 t_1 时刻发生于 x_1 处,后一事件则在 t_2 时刻发生于 x_2 处(注意 x_1, x_2 是不相等的),即

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{\beta}{c} \zeta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{\beta}{c} \zeta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

所以, S 系中对这两事件所量出的时间是

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{\beta}{c} \zeta \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{\beta}{c} \zeta \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'$$
$$\Delta t > \Delta t'$$

由对于事件发生的地点相对运动的惯性系中所量出的时间,比由相对静止的惯性系所量出的时间(称为固有时间)要延长一些. 用 τ_0 表示固有时间,应有 $\Delta t' = \tau_0$, 所以

$$\Delta t = \gamma \tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (16-17)$$

换句话说,一时钟由一个与它相对运动的观测者来观察时,就比相对于它相对静止的观测者观察时走得慢.

注意,时间延缓或时钟进程的延缓,完全来自相对论时空效应,与钟表的具体运转无关.并且不仅对时钟,包括摆的振动周期和晶格振荡的频率等都如此,对一切生长变化的进程(包括生物钟,如心跳的频率等)都如此.时间延缓效应的来源是光速不变原理,它是时空的一种属性,并不涉及时钟的任何机械原因和原子内部的任何过程.

例 16-4 假定测得高能宇宙射线中的 μ 子的平均寿命 $\tau_2 \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$, 设实验室中产生的 μ 子平均寿命为 $\tau_1 = 2.67 \times 10^{-5} \text{ s}$, 其运动速度为 $u \ll c$, 试按相对论估算宇宙射线 μ 子的速度, 及其产生地点离地面的高度.

解 依题意 $\tau_0 = \tau_2 = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$

$$\tau_1 = \gamma \tau_2$$

则

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

所以

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2} = c \sqrt{1 - \frac{(2.2 \times 10^{-6})^2}{(2.67 \times 10^{-5})^2}} \approx 0.997c$$

在 τ_1 这段时间内, μ 子所飞行的距离为

$$d = u\tau_1 = 0.997 \times 3 \times 10^8 \times 2.67 \times 10^{-5} \approx 8 \times 10^3$$

即,宇宙射线中的 μ 子产生地点离地面 8000 m

§ 16.4 狭义相对论质量、动量和能量

一、相对论动量和质量

经典力学中,物体动量的定义为其质量与速度的乘积

$$p = mv$$

动量守恒定律是经过大量实践考验的一个基本规律,它在伽利略变换下对一切惯性

系都成立. 实际计算指出, 在狭义相对论中, 如果动量仍然保留它在经典力学中的定义, 并且质量仍然是不随物体的运动状态而改变的恒量, 那么动量守恒定律在洛伦兹变换下就不能对所有惯性系都成立. 力学中这么重要的一个基本定律, 却不能与相对论原理相容, 说明在相对论中, 或者是动量的经典定义必须修改, 或者是“质量不随运动状态改变”的看法必须放弃. 理论分析或观察实验都证明, 可以在形式上仍把动量写作 $p = mv$, 但考虑到质量随物体运动速度不同而发生变化, 引入

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16-18)$$

式中 v 为物体运动的速率, m 为物体以速率 v 运动时的质量, m_0 为物体静止时的质量(称为静质量), 于是动量为

$$p = m v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16-19)$$

由(16-18)式可知, 物体以速度 v 运动时的质量为 m , 等于其静止质量 m_0 的 γ 倍. 当然, 这里所说的运动, 仍是相对于一定惯性参照系而言的, 所谓静止, 则是自某惯性参照系来看, 其速度远小于光速的意思. 由此可见, 在经典力学中认为绝对不变的又一个基本量——质量, 在相对论中, 也与长度、时间一样, 是随被测物体与观察者(参照系)的相对运动状态而改变的量. 对一般物体来说, $m_0 \neq 0$, 速度越大, m 就越大. 当 $v \rightarrow c$ (光速) 时, $\gamma \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, 这时不论对物体加多大的力, 也不可能再使它的速度增加. 故一切运动物体的速度, 再大也不能大过光速. 这与根据洛伦兹变换得到的结论相一致. (16-18) 式称为爱因斯坦质量变换公式.

物体的质量随速度而变这一事实, 早在 1901 年考夫曼在对 β 射线的研究中就观察到了, 后来又为许多(包括高能粒子加速器的)实验所证实, 现已成功地应用于高能质子加速器和电子加速器的设计, 使得相对论的正确性再也不容置疑.

在相对论力学中, 若仍用动量对时间的变化率定义质点所受的力, 则

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m v) \quad (16-20)$$

仍是正确的. 式(16-20)是相对论动力学的基本方程.

二、相对论能量

若对静止质量为 m_0 的物体施以 x 方向的外力 F , 使它从静止开始到速度为 v ,

则在此过程中外力所作的功仍定义为物体动能的增量,则

$$\begin{aligned} E_k &= \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dx \\ &= \int_0^v v d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \end{aligned}$$

利用分部积分法,经化简后可得

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2$$

即

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (16-21)$$

按功能原理,此功 A 应等于物体能量的增量.令物体在速度为 v 时的能量为 E ,在速度为零时的能量为 E_0 ,则

$$E_k = E - E_0$$

其中

$$E_0 = m_0 c^2$$

称为物体的(相对论)静能量,而

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

称为物体的(相对论)总能量.

三、质能关系

关系式 $E = mc^2$ 给出了物体的质量和能量这两个重要的物理量之间的密切联系.如果一物体的质量发生 Δm 的变化,据上式可知,物体能量也一定有相应的变化.

$$\Delta E = \Delta(mc^2) = c^2 \Delta m \quad (16-22)$$

总之,物体有什么样的运动状态,它就必定具有什么样的质量和能量.两者始终相互对应地联系在一起.不能把能量看成是独立于物质之外的东西.

相对论中物体的能量是物体内能的总和.日常生活中的系统能量的变化在其总能量中所占的比例也很小.比如,碳的燃烧,一个碳原子与一个氧分子反应产生一个二氧化碳分子,同时放出约 $6.5 \times 10^{-19} \text{J}$ 的能量.按质能关系

$$\Delta m = \Delta E / c^2 = 6.5 \times 10^{-19} / 3 \times 10^8 (\approx 7.2 \times 10^{-3.6}) \text{kg}$$

这只占CO₂分子质量的万亿分之一,即使燃烧1百吨煤放出 3.3×10^{16} J的能量,其质量变化也只有0.37kg,所以,质量的损失实际上是难以观察到的。

四、动量和能量的关系

如前所述,静质量为 m_0 ,速度为 v 的物体的动量和质量为

$$P = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

将两式平方并消去 v ,可得关系式

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

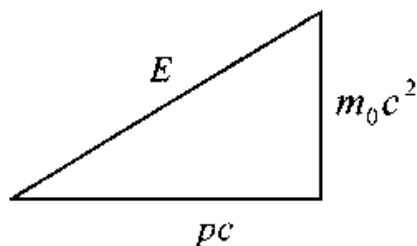
由于 $p = mv$, $E_0 = m_0 c^2$, $E = mc^2$,所以,上式可写为

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad (16-23)$$

这是相对论中动量和能量之间的一个重要关系式.为了便于记忆,式(16-23)可以用图16.5的三角形表示出来.

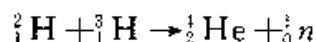
对于光子这类粒子,由于 $E \gg E_0$,式(16-23)可以近似地写为

$$E \approx pc \quad (16-24) \quad \text{图 16.5 相对论动量能量关系}$$



狭义相对论的建立是物理学发展史上的一个里程碑,成为现代物理的重要理论支柱.与经典物理学相比较,狭义相对论更客观、更真实地反映了自然规律.目前,狭义相对论不仅被大量的实验事实所证实,而且已经成为研究宇宙星体、粒子物理以及一系列工程物理(比如反应堆中的能量释放、带电粒子加速器的设计等)问题的基础.

例 16-5 太阳内部的核聚变中,一个氘核(${}^2_1\text{H}$)和一个氚核(${}^3_1\text{H}$)可聚变成一个氦核(${}^4_2\text{He}$),并产生一个中子(1_0n)



已知一个氘核的静能量为1875.628MeV,一个氚核的静能量为2808.944MeV,

一个氦核的静能量为 3727.409MeV , 一个中子的静能量为 939.573MeV . 试问: 在这个核聚变反应中, 有多少能量被释放出来? 因释放能量而减少的质量是多少?

解 反应前氦核与氘核的静能量之和为

$$(1875.628 + 2808.944)\text{MeV} = 4684.572\text{MeV}$$

反应后氦核与中子的静能量之和为

$$(3727.409 + 939.573)\text{MeV} = 4666.982\text{MeV}$$

可见, 在这个核聚变反应中, 减少的静能量为

$$\Delta E = (4684.572 - 4666.982)\text{MeV} = 17.59\text{MeV}$$

由 $\Delta E = \Delta mc^2$, 可得因释放能量而减少的质量

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 1.954 \times 10^{-16}\text{MeV}/c^2 = 3.127 \times 10^{-11}\text{kg}$$

应注意, “ MeV/c^2 ” 中的 “ c ” 只作为符号, 并不是数值, 在核物理中, 常用 “ MeV/c^2 ” 作为质量单位.

例 16-6 已知质子的静能量为 938MeV , 设一质子以速度 $v = 0.80c$ 运动, 求其总能量、动能和动量.

解 根据质能关系式, 质子的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{938}{\sqrt{1 - 0.8^2}}\text{MeV} = 1563\text{MeV}$$

质子的动能为

$$E_k = E - m_0 c^2 = 1563\text{MeV} - 938\text{MeV} = 625\text{MeV}$$

质子的动量

$$\begin{aligned} p &= mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 0.8 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{1 - 0.8^2}}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 6.68 \times 10^{-19}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

质子的动量也可以这样求得

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2} = \sqrt{1563^2 - 938^2}\text{MeV} = 1250\text{MeV} \\ p &= 1250\text{MeV}/c \end{aligned}$$

注意, 在 MeV/c 中 “ c ” 是作为光速的符号而不是数值. 在核物理中经常用 “ MeV/c ” 作为动量的单位.

§ 16.5 广义相对论简介

一、广义相对论的基本原理

爱因斯坦于1905年建立了狭义相对论,开创了物理学新纪元,但是还有一些与相对论有关的重要问题没有解决.任何正确的物理规律必须满足相对性原理,而牛顿的引力理论是不满足相对性原理的,说明他不是严格的引力理论.无论是牛顿力学,还是狭义相对论、电磁理论等物理规律,都是在惯性系里的规律,在非惯性系是不成立的.换句话说,对物理规律而言惯性系和非惯性系是不平等的,即狭义相对论是有局限性的.

从牛顿的绝对时空观到狭义相对论的时空观,已经有了很大的飞跃,狭义相对论使时间、空间有机地结合在一起,但是时空和物质运动仍然是孤立的,与爱因斯坦对时间、空间、物质的信念不符合.因此,爱因斯坦在建立狭义相对论以后并未止步不前,从1907年起历时8年,于1915年建立了广义相对论,建立起了关于时间、空间、引力的理论,将时空与物质及其分布和运动联系起来,使人类对自然界特别是对时空的认识迈上了新的台阶.

广义相对论的两个基本原理是:

(1) 相对性原理

要破除惯性系在表达物理规律上的特殊地位,就要使一切参考系(包括惯性系与非惯性系)都有平等的权利.在爱因斯坦看来,我们没有什么理由把加速参考系排斥在相对性原理之外,于是爱因斯坦认识到,物理规律应当在任何参考系中都能表达,反映物理规律的方程式在所有参考系中应当有相同的形式.把狭义相对论的相对性原理加以推广,就成为“广义相对性原理”:一切参考系中的物理规律都是完全平等的.这是广义相对论的一个基本假设.

(2) 等效原理

惯性质量记作 m_i ,开始是由牛顿运动定律定义的,反映物质惯性的大小,到狭义相对论中进一步与物质的能量联系起来,是物质本性的一个定量体现.引力质量记作 m_g ,是由万有引力定律定义的,反映物质的引力特性,也是物质本性的一个定量体现.从表面看, m_i 和 m_g 是物质两种不同性质的体现,两者不应该有确定关系,但由

实验知,各种物质的 m_i 和 m_g 成正比,比例系数与物质无关.这样,选择合适的单位后可取 $m_i = m_g$,最后通过实验确定万有引力常数 G 的数值.

爱因斯坦认识到引力与惯性力有相同的根源,又考虑到引力与惯性力的相似性,把“引力质量与惯性质量相等”的事实推进一步,提出等效原理:引力场与惯性场的一切物理效应都是局域不可区分的.

按照等效原理,引力和惯性力在物理效果上完全没有区别,或者说,一个均匀的引力场与一个匀加速参考系完全等价.因此,一个局域参考系的加速度只有相对的意义,这正是广义相对论的基本观点.

爱因斯坦从这两个基本原理出发建立了广义相对论——一个相对论性的引力理论.这个理论的基本框架是这样的:引力可以等效为惯性力,惯性力又与所在参考系的加速运动有关,而一个以任意加速度运动的参考系的特征又可利用四维时空的几何性质来描述.

近二三十年来,广义相对论迅速发展,在空间物理、天体物理、宇宙学方面取得了巨大成绩.

二、广义相对论中的局域惯性系

惯性参考系是牛顿力学的基本概念之一,牛顿力学是惯性系的力学规律.牛顿力学的惯性系是指惯性定律成立的参考系,在此参考系中不受力的物体将保持静止或匀速直线运动状态.反过来讲,严格的惯性系相对于不受力的物体也保持静止或匀速直线运动状态.按此定义找严格的惯性系非常困难,或者说找不到严格的惯性系.实际应用的惯性系都不是严格的,其中恒星参考系是相当好的惯性系,牛顿力学中的惯性系尺度可以无限延伸,可以有无数的惯性系,它们彼此做匀速直线运动.

爱因斯坦认为,真正严格的惯性系只能是一些局域惯性系(partial inertial system).各个点上的局域惯性系之间是可以有相对加速度的,引力的作用就在于决定各个局域惯性系之间的联系.

狭义相对论也是惯性系的自然规律,但是相对论的惯性系与牛顿力学的惯性系大不相同.

广义相对论是在狭义相对论基础上发展起来的,爱因斯坦这样说明它们之间的关系:“一个理论本身指出创立一个更为全面的理论的道路,而在这更为全面的理论中,原来的理论作为一个极限情况继续存在下去.”狭义相对论就是广义相对论中引

力为零的特殊情况下的理论. 为使特殊情况与普通情况相区别, 广义相对论中也用惯性系概念, 称狭义相对论成立的参考系或引力为零的参考系为惯性系. 与牛顿力学不同, 相对论的惯性系很容易确定, 在引力场中, 自由落体的物体构成的局域参考系中, 引力完全被惯性力抵消, 由等效原理知, 惯性力与引力等价, 因此按广义相对论的观点, 此局域内总引力为零即为惯性系, 称为局域惯性参考系. 按照牛顿力学观点, 恒星外面的自由落体构成的参考系——广义相对论的局域惯性系——绝不是惯性系; 按广义相对论的观点, 恒星参考系——牛顿力学的好惯性系——决不是惯性系, 因为有引力存在.

利用等效原理和广义相对性原理可以得到许多重要的推论, 使人们对引力场中的时空有初步的理解. 由等效原理可以直接推论光线在引力场中必然偏离直线, 迄今为止, 共观测了几百颗恒星的光线, 基本上都与广义相对论的理论值符合. 广义相对论向世人指出, 引力场中的四维时空和三维纯空间都是弯曲的. 爱因斯坦一直把广义相对论看做自己一生最重要的科学成果, 汤姆逊曾经把广义相对论称为人类历史上最伟大的成就之一.

三、黑洞

广义相对论时空效应的预言之一是黑洞. 黑洞是指恒星(或任何物质)的外部会有一个特别的时空区域, 在这个区域中, 由于存在特别强烈的引力作用, 那里的时空变得如此弯曲, 以致那里的光和其它粒子都只能单方向落入引力源, 而不能静止或向外运动, 其中恒星物质本身也只能不断地收缩而变成密度为无穷大的奇点. 这样一个奇特的时空区域叫做黑洞(blackhole).

1939年, 美国物理学家奥本海默(Oppenheimer)和斯奈德尔(Snyder)从广义相对论出发, 提出了一个观点: 如果一个星体的密度非常巨大, 它的引力也非常巨大, 以至在某一临界半径之内, 任何物质(甚至电磁辐射)都不能从它的引力作用下逃逸出去.

20世纪60年代以来, 随着恒星演化理论的发展以及天文观测手段的进步, 特别是射电技术的进展, 黑洞这一理论概念受到越来越多的物理学工作者的重视. 到了70年代, 黑洞则成为当时天体物理学的一个热门前沿课题.

寻找黑洞的可行途径之一是利用密近双星. 所谓密近双星是指靠得很近的两个星体在相互吸引力作用下形成相互环绕运行的一个系统. 每一个双星系, 常常由一

个明显可见的正常星和一个看不见(或看不清)的物体(从正常星体运行轨道可推断其存在)所组成,前者称主星,后者称伴星.如果一个黑洞和一个正常恒星构成密近双星,那么我们可以通过正常星的运行周期、质量来判明其中黑洞的存在.

另外,双星系中的主星由于受到伴星黑洞强大引力的吸引,当其外层物质被黑洞潮汐力撕裂后,这些物质必然会被吸积到黑洞中去.在这些物质向黑洞坠落的过程中,巨大的能量将以 x 射线或 γ 射线形式辐射出来.所以,强烈的 x 射线源常常是寻找黑洞的主要线索之一.

在黑洞理论方面,英国当代著名物理学家霍金作出了重要贡献,1971年他提出了黑洞面积不减定理,1974年进一步把量子理论与广义相对论结合,提出了黑洞辐射理论,这就是在20世纪70—80年代引起物理学界轰动的“霍金辐射”.

思 考 题

16-1 什么是力学相对性原理?在一个参考系内作力学实验能否测出这个参考系相对于惯性系的加速度?

16-2 什么是洛伦兹变换?它的基础是什么?它和伽利略变换有什么联系和区别?

16-3 有下列几种说法:

(1) 所有惯性系对物理基本规律都是等价的.

(2) 在真空中,光的速度与光的频率、光源的运动状态无关.

(3) 在任何惯性系中,光在真空中沿任何方向的传播速率都相同.

其中哪些说法是正确的?

16-4 在洛伦兹变换中,那些量是不变量?加速度是不变量吗?

16-5 同时性的相对性是什么意思?为什么会有这种相对性?如果光速是无限大,是否还会有同时性的相对性?

16-6 对某观察者来说,发生在某惯性系中同一地点、同一时刻的两个事件,对于相对该惯性系作匀速直线运动的其它惯性系中的观察者来说,它们是否同时发生?

16-7 在狭义相对论中,下列说法中哪些是正确的?

(1) 一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速。

(2) 质量、长度、时间的测量结果都是随物体与观察者的相对运动状态而改变的。

(3) 在一惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件在其他一切惯性系中也是同时发生的。

(4) 惯性系中的观察者观察一个与他作匀速相对运动的时钟时, 会看到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得慢些。

16-8 在 S' 惯性系中, $t' = 0$ 时刻, 一根细棒两端点的坐标分别是 x'_1 和 x'_2 , 则棒长为 $x'_2 - x'_1$. 要在实验室坐标系 S 中求出此棒的长度, 如果利用变换式 $x = \frac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, 则得 $x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, 于是, 运动着的细棒变长了, 这与狭义相对论中的长度收缩效应是相左的. 问题出在什么地方? 试解释之。

习 题

16-1 设 S' 系以速率 $v = 0.60c$ 相对于 S 系沿 xx' 轴运动, 且在 $t = t' = 0$ 时, $x = x' = 0$. 若有一事件, 在 S 系中发生于 $t = 2.0 \times 10^{-7} \text{ s}$, $x = 50 \text{ m}$ 处, 该事件在 S' 系中发生于何时刻?

16-2 设有两个参考系 S 和 S' , 它们的原点在 $t = 0$ 和 $t' = 0$ 时重和在一起. 有一事件, 在 S' 系中发生在 $t' = 8.0 \times 10^{-8} \text{ s}$, $x' = 60 \text{ m}$, $y' = 0$, $z' = 0$ 处, 若 S' 系相对于 S 系以速率 $v = 0.06c$ 沿 xx' 轴运动, 问该事件在 S 系中的时空坐标为多少?

16-3 一列火车长 0.30 km (火车上观察者测得), 以 100 km/h 的速度行驶, 地面上观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端. 问火车上的观察者测得两闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少?

16-4 在惯性 S 系中, 某事件 A 发生在 x_1 处, 经过 $2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$ 后, 另一事件 B 发生在 x_2 处, 已知 $x_2 - x_1 = 300 \text{ m}$. 如果在 S' 系中测得两事件发生在同一地点, 则参考系 S' 相对 S 系的速度为多少?

16-5 在惯性系 S 中, 有两个事件同时发生在 xx' 轴上相距为 $1.0 \times 10^3 \text{ m}$ 的两处, 从惯性系 S' 观测到这两个事件相距为 $2.0 \times 10^3 \text{ m}$, 试问由 S' 系测得此两事件的时间间隔为多少?

16-6 边长为 a 的正方形薄板静止于惯性系 S 的 Oxy 平面内,且两边分别与 x, y 轴平行.今有惯性系 S' 以 $0.8c$ (c 为真空中光速) 的速度相对于 S 系沿 x 轴作匀速直线运动,则从 S' 系测得薄板的面积为多少?

16-7 质子在加速器中被加速,当其动能为静止能量的 4 倍时,其质量为静止质量的多少倍?

16-8 设某微观粒子的总能量是它的静止能量的 K 倍,则其运动速度的大小为多少?

16-9 若一电子的总能量为 5.0 MeV ,则该电子的静能、动能、动量和速率各为多少?

第 17 章 量子物理基础

量子力学是反映微观粒子(分子、原子、原子核,基本粒子等)运动规律的理论,量子力学与相对论并列被认为是近代物理学的两大理论支柱.量子力学的许多基本概念、规律与方法都和经典物理的截然不同,在物理学中引起了深刻的变化,使 20 世纪的物理学彻底改观.尽管它的哲学意义和如何诠释它至今仍在科学家中争论不休,然而它的应用越来越广泛,它在现代科学和技术中的应用已经获得了巨大的成功,如在材料科学、生命科学(DNA 螺旋结构、有机生物分子)、半导体的掺杂、纳米技术、介观物理特性、化学(量子化学)、电子技术(量子点、量子线、量子开关)等等中.它已成为现代物理学的基础之一.

量子概念是 1900 年普朗克首先提出的.19 世纪末的三大发现,即 X 射线(1895 年)、放射性(1896 年)和电子(1897 年),成为近代物理学发展的序幕.到 20 世纪初,人们从大量精确的实验中发现了许多新现象,这些新现象用经典物理学理论是无法解释的,其中主要的有热辐射、光电效应和原子的线状光谱现象.1900 年,普朗克针对用经典物理学解释黑体辐射的困难,提出了辐射源能量量子化的概念;1905 年,爱因斯坦针对光电效应的实验事实与经典观念的矛盾,提出光量子的概念;1913 年,玻尔把量子化概念用到原子轨道上,提出量子态的概念,并成功地解释了氢光谱;1925 年,泡利提出了他的不相容原理及同年乌仑贝克和古兹米特提出的电子自旋的假设,使得元素周期性等一系列实验事实都得到了很好的解释.至此所形成的理论是经典物理与近代物理的混合物,没有完全脱离经典物理的束缚,故叫旧量子论.

量子力学起源于 1923 年德布罗意提出的物质具有波粒二象性的概念,1925 年海森堡提出的矩阵力学,1926 年薛定谔提出的波函数及波动力学,波恩提出的波函数的统计解释,后来薛定谔和狄拉克证明了矩阵力学和波动力学是等价的,合并为量子力学.1926-1930 年,狄拉克对量子力学作了全面的总结,发展为相对论量子力学,这样到 20 世纪 30 年代初量子力学就建立发展起来了.

波粒二象性是量子力学中最重要的概念.要特别强调的是,这里的“波”和“粒子”与经典概念上的波和粒子是截然不同的.如何理解量子力学的哲学意义,如何解

释量子力学的计算结果等,使得在量子力学发展中出现许多派别,其中重要的是以玻尔为首的哥本哈根学派与爱因斯坦两大派别,他们对量子力学的“不确定关系”等问题展开了近 30 年的“争吵”,他们的争论推动了量子力学理论和思想上的发展,并得到逐步完善,现在一般以哥本哈根学派理论诠释为主流。

应当指出,量子力学应用到宏观领域时,量子力学就转化为经典力学,正像在低速领域相对论转化为经典理论一样。

§ 17.1 普朗克能量子假设

实验表明,任何物体在任何温度下都在不断地向周围空间发射电磁辐射,其辐射波谱是连续分布的。在室温下,物体单位时间内辐射的能量很少,而且辐射波谱大多分布在波长较长的区域。随着温度升高,单位时间内辐射的能量迅速增加,辐射能中短波部分所占比例也逐渐增大。例如,把一根铁棒插入炉火中,它会被烧得通红。起初在温度不太高时,我们看不到它发光,却可以感觉到它辐射出来的热量。随着温度的升高,我们不仅会感觉到它辐射的热量的迅速增长,还会看到铁棒开始发光,它的颜色也由暗红逐渐转为橙红。如果炉温足够高,例如用焦炭火,我们还可以看到铁棒发出黄中泛白的颜色。这种现象其实是物质共有的特性,随着物质温度的升高,不仅单位时间内辐射的能量迅速增加,而且辐射电磁波中可见光成分逐渐显著,物体由暗红色,逐渐变为赤红、黄、白、蓝白色等。物质的这种由其温度所决定的电磁辐射称为热辐射。

物体在辐射电磁波的同时,也吸收投射到它表面的电磁波。当辐射和吸收达到平衡时,物体的温度不再变化而处于热平衡状态,这时的热辐射称为平衡热辐射。

理论和实验表明,物体的辐射本领越大,其吸收本领也越大,反之亦然。图 17.1(a)、(b) 所示分别是一块白底黑花的瓷片在室温时和在高温时的照片。在室温时,瓷片本身辐射的主要是长波的不可见光,我们看到的是照射到瓷片上光的反射光。白底部分吸收本领小,入射光多被反射,黑花部分则吸收本领



图 17.1 白底黑花瓷片的照片

大,入射光多被吸收,反射少,所以看起来白底部分比黑花部分明亮.在高温时,瓷片辐射的可见光部分居多,看到的主要是瓷片本身辐射的光,黑花部分吸收本领大,辐射本领也大,白底部分的吸收本领小,辐射本领也小,因此看起来,黑花部分反而比白底部分明亮.

投射到物体表面的电磁波,可能被物体吸收,也可能被反射和透射.能够全部吸收各种波长辐射能而完全不发生反射和透射的物体称为绝对黑体,简称黑体.黑体是对热辐射现象进行理论研究的理想模型.显然,在相同温度下,黑体的吸收本领最大,因而辐射本领也最大.但是这种理想黑体在自然界中并不存在,实际中,用不透明材料制成带有小孔的空腔物体作为黑体的模型.如图 17.2 所示,一束电磁波从小孔射入空腔,在空腔内壁上经过多次吸收和反射,就很难有机会再从小孔射出,因此,这个空腔上的小孔就可以被认为相当于黑体表面.

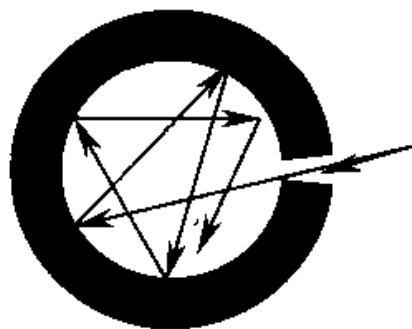


图 17.2 带有小孔的空腔
作为黑体的模型

在日常生活中,白天遥望远处楼房的窗口,会发现窗口特别幽暗,就类似于黑体.这是因为光线进入窗口后,要经过墙壁多次反射吸收,很少再能从窗口射出的缘故.在金属冶炼炉上开一个观测炉温的小孔,这里小孔也很近似于一个绝对黑体的表面.

为描述物体热辐射的频谱分布,引入一个函数 $M(\nu, T)$,它表示在温度 T 时,在频率 ν 附近单位频率范围内的能量密度.相应地, $M(\nu, T)d\nu$ 表示在温度 T 时,在频率 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 范围内的能量密度.而

$$M(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu \quad (17-1)$$

表示在温度 T 时的能量密度.

对于黑体而言,它的 $M(\nu, T)$ 仅与频率 ν 和温度 T 有关,而与其材料、大小、形状以及表面状况等无关,正因为如此,黑体成为热辐射理论研究的重要模型.

加热空腔,使它保持在温度 T ,则从小孔发出的辐射就可看成是一个温度为 T 、表面积与小孔相等的绝对黑体发出的平衡热辐射.

由实验结果,总结出两条有关黑体辐射的定律,其中一条是斯特藩—玻尔兹曼定律,另一条是维恩位移定律.

(1) 斯特藩 — 玻耳兹曼定律

黑体的辐射能流密度与其绝对温度 T 的四次方成正比, 即

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (17-2)$$

式中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$, 称为斯特藩 — 玻耳兹曼常量.

(2) 维恩位移定律

1869年, 维恩根据实验数据得出有关热辐射的经验公式

$$M(\nu, T) d\nu \sim \nu^3 e^{-a\nu/T} d\nu \quad (17-3)$$

这是一个猜测性的经验公式. 维恩还得到了他的著名的维恩位移定律 (Wien's displacement law), 把它用辐射谱强度最大处的波长 λ_m 来描述为

$$\lambda_m T = b \quad (17-4)$$

其中 $b = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

由斯特藩 — 玻耳兹曼定律看出, 辐射能随绝对温度增高迅速增大, 例如, 绝对温度增大一倍 (如从 300K 增大到 600K), 辐射能就增大 16 倍. 因此, 要达到非常高的温度, 就需要大量的能量, 以克服热辐射损失.

天文学家根据维恩位移定律测定恒星的温度, 例如, 由维恩位移定律可得太阳表面的温度为

$$T_s = \frac{2898}{0.47} = 6166 (\text{K})$$

再利用斯特藩 — 玻耳兹曼定律, 可算出太阳表面的辐射能流密度为

$$M(T) = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (6166)^4 = 8.20 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

由于太阳不是黑体, 所以上面算出的 T_s 和 $M(T)$ 都不是实际值. 通常把 T_s 称为太阳的色温度, 而太阳表面的实际辐射能流密度也小于 $M(T)$. 又如, 按照斯特藩 — 玻耳兹曼定律, 黑体的温度 T 也可以从测定的辐射能流密度 $M(T)$ 来计算. 这就是光测高温的理论依据. 常用的辐射高温计, 就是根据这一道理制成的. 由它测出的温度也不是物体 (非黑体) 的实际温度, 被称为辐射温度, 它总是低于实际温度. 上面说过, 在金属冶炼中, 通过炉上开的小孔, 利用上述方法来测炉温的. 不过炉上的小孔很接近于黑体, 所以测出的温度可以认为是实际炉温.

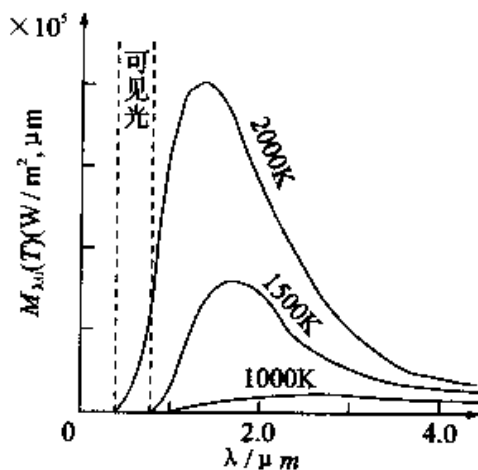


图 17.3 辐射随波长的分布

以上介绍的黑体辐射规律是由实验给出的. 接着, 物理学家就是要从理论上找出符合实验曲线的函数关系式 $M(\nu, T)d\nu$, 也就是找出 $M(\nu, T)$ 的具体函数形式. 上一世纪末, 很多物理学家都企图在经典物理学的基础上解决这一问题, 但是所有这些尝试都遭到了失败.

瑞利和金斯曾各自提出了后来称为瑞利-金斯定律 (Rayleigh-Jeans law) 的公式

$$M(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT d\nu \quad (17-5)$$

式中 c 为光速, k 为玻耳兹曼常数. 在得到这个公式时用到了把空腔中的电磁振荡波看成是驻波形式的谐振子, 而且谐振子的能量取统计平均值的概念. 这个公式在低频时与实验数据符合得很好, 但随着频率升高, 与实验数据偏离越来越远, 而且

$$M(T) = \int_0^{\infty} M(\nu, T)d\nu \sim \nu^3 \Big|_0^{\infty} \rightarrow \infty$$

积分是发散的, 即有名的“紫外灾难”(ultraviolet catastrophe). 瑞利-金斯定律是在经典物理学的基础上提出来的, 它也明显地暴露出经典物理学的缺陷. 因此, 1900年4月, 英国物理学家开尔文说, 黑体辐射实验是物理学晴朗天空上一朵令人不安的乌云.

为了解决上述困难, 德国物理学家普朗克在 1900 年提出了一个全新的 $M(\nu, T)$ 表达式, 其形式为

$$M(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (17-6)$$

式中 c 是光速, k 是玻耳兹曼常量, 普适常量 h 称为普朗克常量, 其值为

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

这一公式称为普朗克公式, 它与实验结果符合得很好. 在频率低时, $h\nu \ll kT$, 普朗克公式蜕化成瑞利-金斯定律的公式, 在频率高时, $h\nu \gg kT$, 普朗克公式蜕化成维恩定律的公式.

普朗克的这个完美的公式一开始是凑出来的. 为了从理论上得到这一公式, 就必须引入一个与经典物理学完全不相容的新概念, 这就是普朗克在 1900 年 12 月 14 日提出的能量子假设. 经典物理认为构成物体的带电粒子在各自平衡位置附近振动成为带电的谐振子, 这些谐振子既可以发射、也可以吸收辐射能, 经典物理学认为谐振子的能量是连续的. 普朗克假设, 谐振子的能量不可能具有经典物理学所允许的

任意值,一个频率为 ν 的谐振子只能具有一系列分立的能量,谐振子的能量是某一最小能量 $h\nu$ 的整数倍,即

$$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu$$

n 为正整数,称为量子数, h 是普朗克常量, $\epsilon = h\nu$ 称为能量子.这一能量分立的概念,称为能量量子化.

按照这个假设,一个频率为 ν 的谐振子的最小能量是 $h\nu$,它在与周围的辐射场交换能量时,也只能整个地吸收或放出一个个能量子.

普朗克的能量子假设,突破了经典物理学的观念,第一次提出了微观粒子具有分立的能量值,打开了人们认识微观世界的大门,在物理学发展史上起了划时代的作用.能量是一份一份的,而不是连续的,就像物质是由原子、由分子组成的一样.这就是量子论的开端,1900年12月14日被认为是量子物理的生日.在这个基础上,经过许多人的努力,终于逐步认识了辐射的粒子性,描述微观粒子(分子、原子、电子等等)的一些物理量具有的量子化特性,最终形成了反映微观粒子运动规律的量子物理学.

普朗克在他的能量子假设基础上,从理论上导出了普朗克公式.实际上,普朗克的贡献远远超出物理学范畴,它启发人们在新事物面前,敢于冲破传统思想观念的束缚,勇于建立新观点、新概念,建立新理论.

就普朗克本人来说,能量子的发现成就了普朗克的名声,而能量子是在百般无奈的情况下给出的,只有这样,黑体辐射公式才能与实验结果符合.而普朗克本人在这之前是玻耳兹曼统计(概率)理论的反对者,在这之后他还是量子论的反对者.直到1911年以后,他才完全认识到量子化的根本意义和重要性.由于对量子理论的卓越贡献,普朗克获得了1918年诺贝尔物理学奖.

§ 17.2 光的波粒二象性

一、光的粒子性的提出

正当普朗克寻找他的能量子的经典根源时,爱因斯坦在能量子概念的发展上前进了一大步,提出了他的光的量子性.

19世纪末,人们已发现,当光照射到金属表面上时,电子会从金属表面逸出.这

种现象称为光电效应。

图 17.4 所示为光电效应的实验装置简图, 图中上方为一抽成真空的玻璃管. 当光通过石英窗口照射由金属或其氧化物做成的阴极 K 时, 就有电子从阴极表面逸出, 这种电子叫光电子. 光电子在电场作用下向阳极 A 运动, 就形成光电流.

实验发现, 如图 17.5 所示, 当阳极电势大于阴极电势时, 在入射光照射下, 有光电流产生, 而当所加电压反向, 即阳极电势低于阴极电势时, 仍有光电流产生. 只是当此反向电压值大于某一值 U_c (不同金属有不同的 U_c 值) 时, 光电流才等于零. 这一电压值称为遏止电压. 遏止电压的存在, 说明从阴极逸出的光电子有一个最大动能, 当反向电场力做功大于逸出光电子的最大动能时, 光电子无论如何不能到达阳极了. 根据能量分析可得光电子逸出时的最大初动能和遏止电压 U_c 的关系应为

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_c \quad (17-7)$$

其中 m 和 e 分别是电子的质量和电量, v_m 是光电子逸出金属表面时的最大速度.

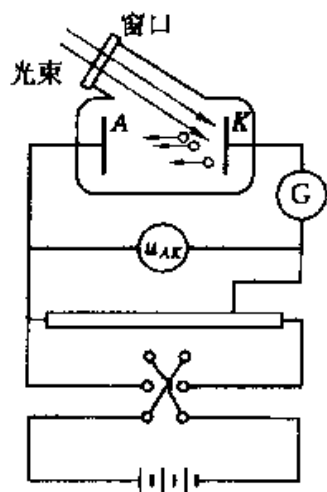


图 17.4 光电效应的实验装置简图

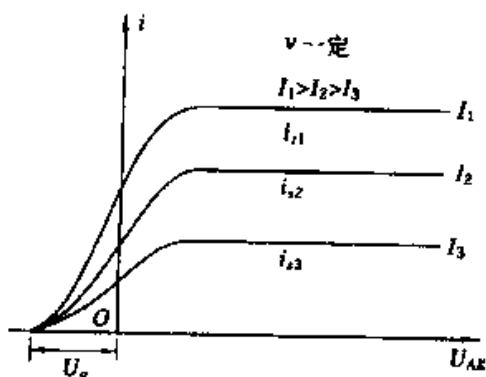


图 17.5 光电效应伏安特性

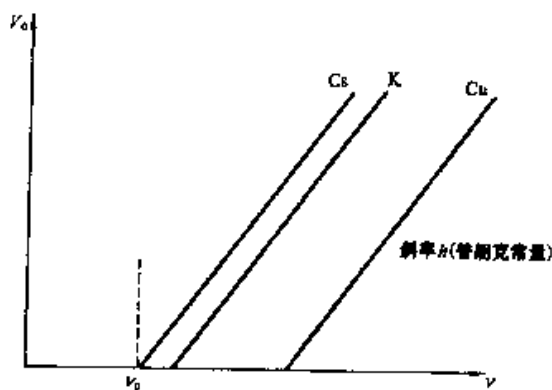


图 17.6 光电效应特性

可以利用式(17-7)测量光电子的最大初动能. 实验结果显示, 光电子的最大初动能和入射光的频率成线性关系, 而且只有当入射光的频率大于某一值 ν_0 时, 才能从金属表面释放电子. 几种金属的光电子的最大初动能和入射光频率的线性关系

(直线)如图 17.6 所示,直线和横轴的交点就是要发生光电效应所需的人射光的最小频率.这一频率 ν_0 叫做光电效应的截止频率(亦称红限),相应的光的波长叫截止波长.不同金属的截止频率不同.

光电效应释放出的光电子的最大初动能由入射光的频率决定,这一实验结果是光的波动理论无法解释的.因为按波动理论,光的强度决定于光波的振幅,金属内电子吸收光波后逸出金属表面的光电子的动能应该随波振幅的增大而增大,不应该与入射光的频率有直线关系.

光电效应的实验结果还有一点值得注意,就是光电子的逸出,几乎是在光照射到金属表面上的同时发生的,实际延迟时间在 $10^{-9}s$ 以下.即使用极弱的人射光,也是这样.这一点用经典波动理论也不能解释.因为在入射光极弱时,按经典波动理论,金属中的电子必须经过长时间才能从光波中收集和积累到足够的能量而逸出金属表面,而这一时间,按此理论计算竟然要达到几分钟或更长.

光的波动理论在光电效应的实验结果上也遇上了“灾难”.

普朗克在正确地解决有关热辐射的电磁波的问题时,只假定了辐射电磁波的带电谐振子的能量是量子化的,而辐射本身,作为广布于空间的电磁波,它的能量还被认为是连续分布的.爱因斯坦发展了关于能量量子化的概念.他于 1905 年发表了三篇著名的科学论文,其中之一的“关于光的产生和转换的一个有启发性的观点”的文章中,论及光电效应等的实验结果时,这样写道:“尽管光的波动理论永远不会被别的理论所取代,……,但仍可以设想,用连续的空间函数表述的光的理论在应用到光的发射和转换的现象时可能引发矛盾.”于是他接着假定:“从一个点光源发出的光线的能量并不是连续地分布在逐渐扩大的空间范围内的,而是由有限个数的能量子组成的.这些能量子个个都只占据空间的一些点,运动时不分裂,只能以完整的单元产生或被吸收.”在这里首次提出的光的能量子单元,在 1926 年被刘易斯(G·N·Lewis)定名为“光子”.

关于光子的能量,爱因斯坦假定,不同颜色的光,其光子的能量不同.频率为 ν 的光的一个光子的能量为

$$E = h\nu \quad (17-8)$$

其中 h 为普朗克常量.

为了解释光电效应,爱因斯坦在 1905 年上述那篇文章中写道:“最简单的方法是设想一个光子将它的全部能量给予一个电子”.电子获得此能量后动能就增加了,

从而有可能逸出金属表面. 以 A 表示电子从金属表面逸出时克服金属内正电荷的吸引力需要做的功(这功叫逸出功), 则由能量守恒可得一个光电子逸出金属表面后的最大初动能应为

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - A \quad (17-9)$$

此式叫光电效应方程.

基于光子概念的光电效应方程(17-9), 完全说明了光电子的最大初动能和入射光的频率的线性关系, 并且给出了红限频率的值. 最大初动能等于零时, 金属表面将不再有光电子逸出, 这时入射光的频率就应是红限频率 ν_0 , 式(17-9)给出

$$\nu_0 = \frac{A}{h} \quad (17-10)$$

借助式(17-10)可以由红限频率求出金属的逸出功.

光电效应的延迟时间极短也可以用光子概念加以说明, 因为一个电子一次吸收一个具有足够能量的光子而逸出金属表面是不需要多长时间的.

此外, 根据图 17.7 中实验曲线的斜率还可以求出普朗克常量 h , 因为该实验图线的斜率就等于 h . 1916 年密立根(R. A. Millikan)对光电效应进行了精确的测量, 获得了光的频率和逸出电子能量之间的关系, 验证了爱因斯坦的光电效应公式, 并精确求出普朗克常数

$$h = 6.56 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

这和当时用其他方法测得的普朗克常数值符合得很好. 从此, 光量子理论开始得到人们的承认, 密立根也因此获得了 1923 年的诺贝尔奖.

就这样, 光子概念被证明是正确的.

为了纪念爱因斯坦的关于量子力学、相对论方面的论文发表 100 周年, 2005 年被联合国教科文组织和联合国大会确定为“国际物理年”, 这些论文为相对论、量子力学等物理学领域奠定了基础, 使物理学在 20 世纪得到全新的发展. 我们相信通过全世界“国际物理年”的行动, 物理学将在 21 世纪为经济、技术、文化等方面会发挥出更大的重要作用.

二、康普顿效应

1923 年康普顿(A. H. Compton)及其后不久吴有训研究了 X 射线通过物质时向各方向散射的现象. 他们在实验中发现, 在散射的 X 射线中, 除了有波长与原射线

相同的成分外,还有波长较长的成分.这种有波长改变的散射称为康普顿散射(或称康普顿效应),这种散射也可以用光子理论加以圆满的解释.

根据光子理论,X射线的散射是单个光子和单个电子发生弹性碰撞的结果.对于这种碰撞的分析计算如下.

在固体如各种金属中,有许多和原子核联系较弱的电子可以看作自由电子.由于这些电子的热运动平均动能(约百分之几电子伏特)和入射的X射线光子的能量(10^1-10^5 eV)比起来,可以略去不计,因而这些电子在碰撞前,可以看作是静止的.一个电子的静止能量为 m_0c^2 ,动量为零.设入射光的频率为 ν_0 ,它的一个光子就具有能量 $h\nu_0$,动量 $\frac{h\nu_0}{c}e_0$.再设弹性碰撞后,电子的能量变为 mc^2 ,动量变为 mv ;散射光子的能量为 $h\nu$,动量为 $\frac{h\nu}{c}e$,散射角为 φ .这里 e_0 和 e 分别为在碰撞前和碰撞后的光子运动方向上的单位矢量(图 17.7).

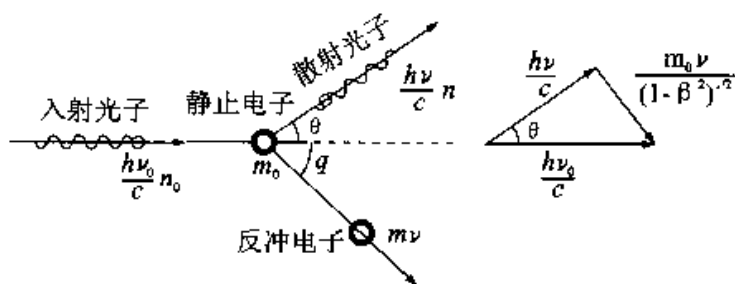


图 17.7 光子与自由电子的碰撞

按照能量和动量守恒定律,应该有

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \quad (17-11)$$

$$\frac{h\nu_0}{c}e_0 = \frac{h\nu}{c}e + mv \quad (17-12)$$

考虑到反冲电子的速度可能很大,式中 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.由上述两个式子可解得

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi) \quad (17-13)$$

式中 λ 和 λ_0 分别表示散射光和入射光的波长.此式称为康普顿散射公式.式中 $\frac{h}{m_0c}$ 具有波长的量纲,称为电子的康普顿波长,以 λ_c 表示.将 h, c, m_0 的值代入可算出

$$\lambda_1 = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

它与短波 X 射线的波长相当。

从上述分析可知,入射光子和电子碰撞时,把一部分能量传给了电子,因而光子能量减少,频率降低,波长变长.波长偏移 $\Delta\lambda$ 和散射角 φ 的关系式(17-13) 也与实验结果定量地符合.式(17-13) 还表明,波长的偏移 $\Delta\lambda$ 与散射物质以及入射 X 射线的波长 λ_0 无关,而只与散射角 φ 有关,这一规律也为实验证实。

康普顿散射的理论和实验的完全相符,曾在量子论的发展中起过重要的作用.它不仅有力地证明了光具有二象性,而且还证明了光子和微观粒子的相互作用过程也是严格地遵守动量守恒定律和能量守恒定律的。

应该指出,康普顿散射只有在入射波的波长与电子的康普顿波长可以相比拟时,才是显著的.例如,入射波波长 $\lambda_0 = 400 \text{ nm}$ 时,在 $\varphi = \pi$ 的方向上,散射波波长偏移 $\Delta\lambda = 4.8 \times 10^{-3} \text{ nm}$, $\Delta\lambda/\lambda_0 = 10^{-5}$. 这种情况下,很难观察到康普顿散射.当入射波波长 $\lambda_0 = 0.05 \text{ nm}$, $\varphi = \pi$ 时,虽然波长的偏移仍是 $\Delta\lambda = 4.8 \times 10^{-3} \text{ nm}$,但 $\Delta\lambda/\lambda_0 \approx 10\%$,这时就能比较明显地观察到康普顿散射了.这也就是选用 X 射线观察康普顿散射的原因。

在光电效应中,入射光是可见光或紫外线,所以康普顿效应不显著。

现在说明一个理论问题.上面指出,光子和自由电子碰撞时,“把一部分能量传给了电子”.这就意味着在碰撞过程中,光子分裂了.这是否和爱因斯坦提出的光子“永不分裂”相矛盾呢?不是的.上面的分析是就光子和电子碰撞的全过程说的.量子力学的分析指出:康普顿散射是一个“二步过程”,而且这二步又可以采取两种可能的方式.一种方式是自由电子先整体吸收入射光子,然后再放出一个散射光子(先吸后放);另一种方式是自由电子先放出一个散射光子,然后再吸收入射光子(先放后吸).每一步中光子都是“以完整的单元产生或被吸收的”.无论哪一种方式,所经历的时间都是非常短的.这样的二步过程可以用“费恩曼图”表示(图 17.8).值得注意的是,两步中的每一步都遵守动量守恒定律,全过程自然也满足动量守恒定律.但是每一步并不遵守能量守恒定律,只是全过程总的满足能量守恒定律.这

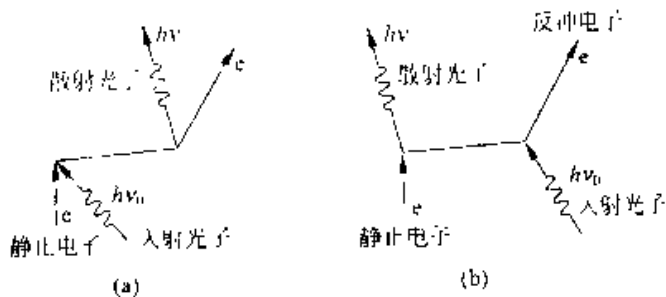


图 17.8 康普顿散射二步过程费恩曼图

种对能量守恒定律的违反,在量子力学理论中是允许的(见 § 17.5 不确定关系).

三、光的波粒二象性

在 19 世纪,通过光的干涉、衍射等实验,人们已认识到光是一种波动——电磁波,并建立了光的电磁理论——麦克斯韦理论.进入 20 世纪,从爱因斯坦起,人们又认识到光是粒子流——光子流.综合起来,关于光的本性的全面认识就是:光既具有波动性,又具有粒子性,相辅相成.在有些情况下,光突出地显示出其波动性,而在另一些情况下,则突出地显示出其粒子性.光的这种本性被称做波粒二象性.光既不是经典意义上的“单纯的”波,也不是经典意义上的“单纯的”粒子.

光的波动性用光波的波长 λ 和频率 ν 描述,光的粒子性用光子的质量、能量和动量描述.由式(17-8) 给出的一个光子的能量,再根据相对论的质能关系 $E = mc^2$, 可得一个光子的相对论质量为

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} \quad (17-14)$$

我们知道,粒子质量和运动速度的关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

对于光子, $v = c$, 而 m 是有限的,所以只能是 $m_0 = 0$. 即光子是静止质量为零的一种粒子.但是,由于光速不变,光子对于任何参考系都不会静止,所以在任何参考系中光子的质量实际上都不会是零.

根据相对论的能量—动量关系 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, 对于光子, $m_0 = 0$, 所以光子的动量为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

或

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (17-15)$$

式(17-8) 和(17-15) 是描述光的性质的基本关系式,式中左侧的量描述光的粒子性,右侧的量描述光的波动性.注意,光的这两种性质在数量上是通过普朗克常量联系在一起的.

§ 17.3 氢原子的玻尔理论

经典物理学不仅在对热辐射进行理论解释时遇到严重困难,而且在说明原子光谱的线状结构及原子本身的稳定性方面也遇到了不可克服的困难. 丹麦物理学家玻尔发展了普朗克的量子假设和爱因斯坦的光子假说等,创立了关于氢原子结构的半经典量子理论,相当成功地说明了氢原子光谱的实验规律.

一、氢原子光谱规律

光谱是研究电磁辐射的波长成分和强度分布的,物理学上更注重波长成分的研究. 在玻尔介入氢原子光谱研究时,物理学家已经在光谱学方面作了相当多的工作,实验精度也已非常高了. 实验发现,光谱分连续光谱、带状光谱和分立的线状光谱,随着产生光谱的物理条件的不同,可以产生其中的两种或三种不同的光谱. 一般情况,在物质的稀薄蒸汽中能产生线状光谱,而线状光谱线的位置与产生该谱线的元素有着对应关系,并且谱线的分布具有确定的规律. 氢原子是最简单的原子,其光谱也是最简单的. 对氢原子光谱的研究是进一步研究原子分子光谱的基础,而原子分子光谱在研究原子、分子结构及物质分析等方面都有重要的意义.

氢原子光谱的实验规律可归纳如下:

- (1) 氢原子光谱是彼此分立的线状光谱,每一条谱线具有确定的波长(或频率).
- (2) 每一条光谱线的波数 $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ 都可以表示为两项之差,即

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = T(k) - T(n) = R_H \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (17-16)$$

式中 k 和 n 均为正整数,且 $n > k$. R_H 称里德伯常量,下标 H 代表氢元素的. 近代测量值为 $R_H = 1.096\,775\,8 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, $T(n) = R_H/n^2$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) 称为氢的光谱项.

(3) 当整数 k 取一定值时, n 取大于 k 的各整数所对应的各条谱线构成一谱线系;每一谱线系都有一个线系限,对应于 $n \rightarrow \infty$ 的情况. $k = 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) 的谱线系称为莱曼线系(1914年莱曼在紫外区发现), $k = 2$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) 的谱线系称为巴耳末线系(1885年巴耳末由已知氢谱线中分析得到), $k = 3$ ($n = 4, 5, 6, \dots$) 的谱线系称为帕邢线系(1908年,帕邢在红外区发现)等等. 图 17.9 是巴耳末线系的照片.

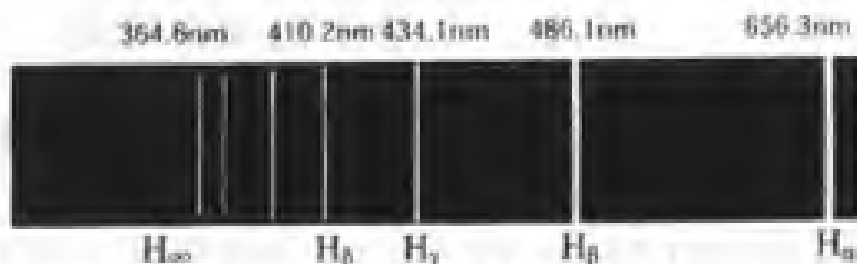


图 17.9 巴耳末线系的照片

二、卢瑟福的原子有核模型

在 1911 年卢瑟福关于原子的核式模型结构得到证明以前,人们对于原子结构所知甚少,当时的实验基础只是电子是分立的,不连续的,或者说是量子化的,原子也是如此,因此氢原子光谱的上述线状光谱规律在相当长时间内未能从理论上给予说明。

在原子的核型结构模型建立以后,按照原子的有核模型,原子是极小的带正电荷的原子核和绕核运动的电子组成。根据经典物理的电磁理论,绕核运动的电子因为有加速度,将不断地向外辐射与其圆运动频率相同的电磁波,因此原子体系的能量将不断地减少,而按卢瑟福模型计算,如果电子在半径为 r 的圆周上绕核运动,则氢原子的能量为 $E = -e^2/8\pi_0 r$,即随能量减少,电子轨道半径将不断减小;与此同时,电子圆运动频率(因而辐射频率)将连续增大,因此原子光谱应是连续的带状光谱,并且最终电子将落到原子核上,因此不可能存在稳定的原子,这些结论显然与实验事实和客观实际不符,表明依据经典理论无法解释原子的线状光谱等规律。

三、氢原子的玻尔理论

玻尔把卢瑟福关于原子的有核模型、普朗克能量子假设、氢光谱经验公式等结合起来,于 1913 年创立了氢原子结构的半经典量子理论,把人们对原子结构的认识向前推进了一大步。

玻尔理论的基本假设是:

(1) 原子只能处在一系列具有不连续能量的稳定状态(简称定态),相应于这些状态,核外电子是在一系列分立的圆轨道上运动,并不向外辐射电磁波。

(2) 当原子从一个定态跃迁到另一个定态时是要吸收或放出能量,例如,从能量为 E_2 高能态向能量为 E_1 的低能态跃迁时,通常是以发射光子来释放能量的,所发射

光子的频率为

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h} \quad (17-17)$$

式(17-17)称为辐射频率公式。

(3) 电子在稳定的圆轨道上运动时,其轨道角动量 $L = mvr$ 必须等于 $h/2\pi$ 的整数倍,即

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-18)$$

上式称为玻尔量子化条件,其中 n 称为量子数, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 称为约化普朗克常量,其值等于 $1.0545887 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

在玻尔氢原子模型中,玻尔还认为,电子在半径为 r 的定态圆轨道上以速率 v 绕核作圆周运动时,其向心力就是库仑力,因而有

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (17-19)$$

由式(17-18)和(17-19)消去 v ,即可得原子处于第 n 个定态时电子轨道半径为

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = n^2 a_0 \quad (17-20)$$

式中 a_0 是氢原子中电子的最小轨道半径,称为玻尔半径,其值为

$$a_0 = r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.0529 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (17-21)$$

式(17-20)表明,由于轨道角动量不能连续变化,电子轨道半径也只能取得分立的值。

$n=1$ 的定态称为基态, $n=2, 3, 4, \dots$ 各态均称为激发态。氢原子处于各定态时电子轨道如图 17.10 所示。

氢原子能量等于电子的动能与电势能之和,即

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

处在量子数为 n 的定态时,能量为

$$E_n = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2(n\hbar)^2},$$

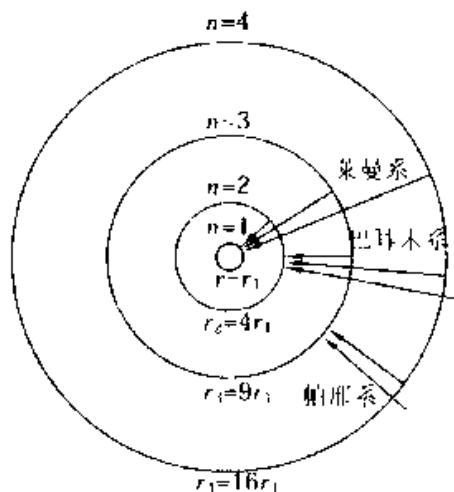


图 17.10 氢原子处于各定态时电子轨道

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-22)$$

由此可见, 由于电子轨道角动量不能连续变化, 氢原子的能量也只能取一系列的分立值, 这称为能量量子化, 这种量子化的能量值称为能级. 令 $n = 1$, 即可得氢原子基态能级的能量

$$E_1 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV} \quad (17-23)$$

基态能级能量最低, 原子最稳定. 随量子数 n 增大, 能量 E_n 也增大, 能级间能量间隔减小. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n \rightarrow \infty$, $E_n \rightarrow 0$, 能级趋于连续, 原子趋于电离. $E > 0$ 时, 原子处于电离状态, 这时能量可连续变化. 图 17.11 是氢原子的能级图.

使原子核外电子电离所需要的能量称为电离能. 根据玻尔理论算出的基态氢原子能量值是 -13.6 eV , 与实验测得的基态氢原子的电离能值相符.

玻尔理论是在研究氢光谱的基础上提出的, 当然氢光谱也就成了玻尔氢原子理论正确性的最直接实验证据. 根据玻尔假设, 当原子从较高能态 E_n 向较低能态 $E_k (n > k)$ 跃迁时, 所发射光子的频率和波数为

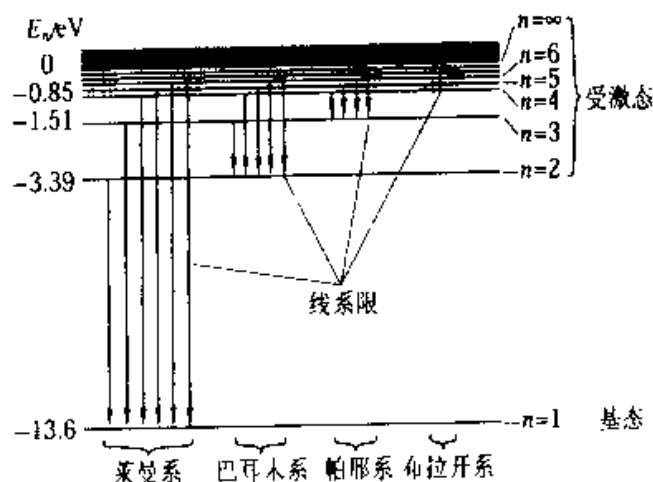


图 17.11 氢原子的能级图

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{hc} (E_n - E_k)$$

将能量表示式(17-22)代入, 即可得氢原子光谱的波数公式

$$\tilde{\nu} = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > k) \quad (17-24)$$

将式(17-24)与氢光谱实验规律式(17-16)比较, 可得里德伯常量 R_H 的理论值为

$$R_{H\text{理论}} = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3 c} = 1.097\,373\,15 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

这个值与实验值 $R_H = 1.096775\,8 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 符合得很好. 式(17-24)中是 $k = 1, 2$ 分别对应赖曼系和巴耳末系, 可见这两个谱线系是原子由各较高能级分别向 k

= 1 和 2 的能级跃迁时发射出来的. 图 17. 11 和图 17. 12 中均给出了能级跃迁所产生的各谱线系.

玻尔模型在光谱学的另两点成功之处是成功地解释了类氢离子的光谱线和肯定了氦的存在. 类氢离子是把原子核外的电子电离, 只留下一个核外电子, 就像氢原子一样, 核外没有其它电子干扰. 对于原子序数为 Z 的类氢离子, 其计算就像前面计算氢原子一样, 可以得到

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mZe^2} = \frac{n^2}{Z} a_0$$

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{mZ^2 e^4}{2(n\hbar)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{\nu} = \frac{2\pi^2 mZ^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > k)$$

$$R_{\text{理论}} = \frac{2\pi^2 mZ^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3 c}$$

玻尔理论成功地说明了氢原子和类氢离子的光谱结构, 表明这个理论在一定程度上能正确地反映单电子原子系统的客观实际.

由以上讨论可知, 在普朗克提出谐振子能量量子化的假设之后, 玻尔理论又指出原子体系中的能量、角动量等也都是量子化的.

四、玻尔理论的缺陷

玻尔的半经典量子理论在说明光谱线结构方面取得了前所未有的成功, 在历史上, 玻尔理论处于非常重要的地位. 但是它也有局限性, 如只能计算氢原子和类氢离子的辐射光谱, 对于稍微复杂的原子, 例如只有一个原子核和两个电子构成的氦原子, 玻尔理论就不能解出能级和光谱的频率; 另外, 它完全没有涉及谱线强度、宽度及偏振性等的处理.

玻尔理论的问题在于理论结构本身. 玻尔理论作了一些在经典物理学规律中没有的假定, 例如“原子处于定态时不辐射”, 生硬地加上了原子的量子化条件, 认为原子的角动量、能量是不连续的, 是量子化的, 这些都与经典理论不符. 而这个理论又是以经典理论为基础的, 建立在经典力学基础上的, 引入的量子化条件是没有理论依据的. 因此玻尔理论是一个经典理论和量子化条件放在一齐的一个结构, 它远不是一个完善的理论. 玻尔理论的成功之处在于它正确地表达了部分客观事实, 在历

史上起着承前启后的作用,是原子物理发展史上一个重要的里程碑,对于以后建立量子力学理论起了巨大的推动作用.另外,玻尔理论的一些基本概念,如“定态”、“能级”、“跃迁”等在量子力学中仍是非常重要的基本概念,而另一些概念,如“轨道”等对微观粒子不再适用.

§ 17.4 实物粒子的波粒二象性

一、德布罗意假设

1900年普朗克假定光(电磁)辐射是以分立的量子形式存在的,1905年爱因斯坦在解释光电效应时假定光不仅在传播时具有量子性,在光的发射和接收时也具有量子性,而光的干涉、衍射和偏振表明光具有明显的波动性,而且是横波,普朗克理论和爱因斯坦理论的成功又表明光具有粒子性,因此光具有在宏观世界里互不相容的两重特性——波粒二象性.

1924年法国青年物理学研究生德布罗意在光的二象性的启发下想到:自然界在许多方面都是明显地对称的,如果光具有波粒二象性,则实物粒子,如电子,也应该具有波粒二象性.他并且把光子的能量—频率和动量—波长的关系式(17-8)和(17-15)借来,认为一个实物粒子的能量 E 和动量 p 跟和它相联系的波的频率 ν 和波长 λ 的定量关系与光子的一样,即有

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{E}{h} \\ \lambda &= \frac{h}{p} \end{aligned} \right\} \quad (17-25)$$

应用于实物粒子的这些公式称为德布罗意公式或德布罗意假设.和实物粒子相联系的波称为物质波或德布罗意波,式(17-25)给出了相应的德布罗意波长.

德布罗意是采用类比方法提出他的假设的,当时并没有任何直接的证据.但是,爱因斯坦慧眼有识,当他闻知德布罗意的假设后就评论说:“我相信这一假设的意义远远超出了单纯的类比.”事实上,德布罗意的假设不久就得到了实验证实,而且引发了一门新理论——量子力学的建立.

二、德布罗意波实验验证

1925年,戴维孙(C. J. Davisson)和革末(L. A. Germer)在一次偶然的场合中

进行了电子束在晶体表面上的散射,观察到了和 X 射线衍射图案类似的结果.在了解到德布罗意的物质波概念后,通过分析,他们认为,这就是电子衍射现象,并于 1927 年较精确地进行了该实验.于是他们首先证实了电子的波动性.他们用的实验装置简图如图 17.12(a) 所示,使一束电子射到镍晶体的某一晶面上,同时用探测器测量沿不同方向散射的电子束的强度.实验中发现,当入射电子的能量为 54 eV 时,在 $\varphi = 50^\circ$ 的方向上散射电子束强度最大(图 17.12(b)).按类似于 X 射线在晶体表面衍射的分析,由图 17.12(c) 可知,散射电子束强度极大的方向应满足下列条件:

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad (17-26)$$

已知镍的一组晶面之间的间距为 $d = 9.1 \times 10^{-11} \text{ m}$,式(17-26)给出“电子波”的波长应为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2d\sin\theta}{k} = \frac{2d\sin(90^\circ - \varphi/2)}{k} = \frac{2 \times 9.1 \times 10^{-11} \times \sin 65^\circ}{1} \\ &= 0.165 \times 10^{-9} \text{ m} = 0.165 \text{ nm} \end{aligned}$$

按德布罗意物质波假设公式(17-25),该“电子波”的波长应为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 54 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 0.167 \times 10^{-9} \text{ m} = 0.167 \text{ nm} \end{aligned}$$

这一结果和上面的实验结果符合得很好.

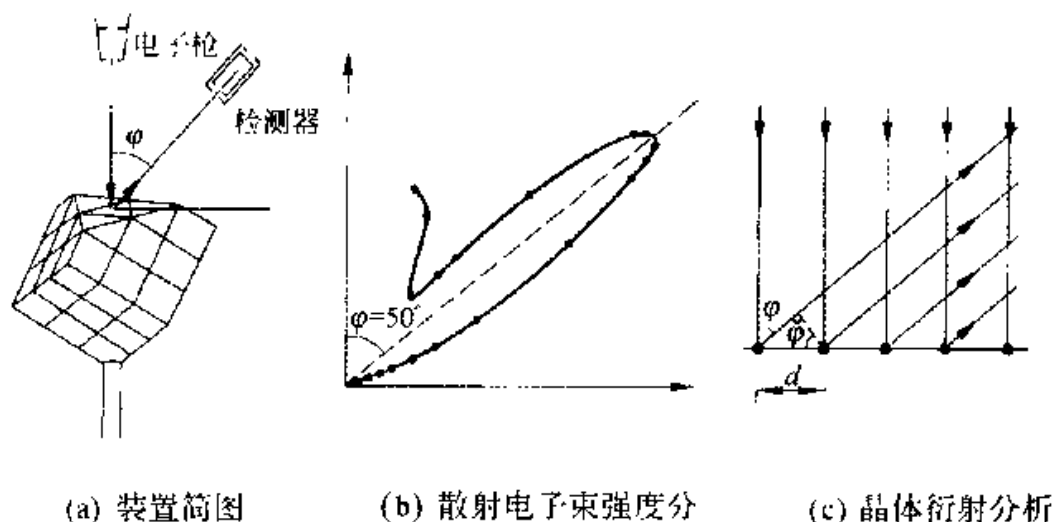


图 17.12 通过电子的衍射实验验证电子的波动性

同年,汤姆孙(G. P. Thomson)做了电子束穿过多晶薄膜的衍射实验[图 17.13(a)],成功地得到了和 X 射线通过多晶薄膜后产生的衍射图样极为相似的衍射

图样.

除了电子外,以后人们还陆续用实验证实了中子、质子以及原子甚至分子等都具有波动性,德布罗意公式对这些粒子同样正确.这就说明,一切微观粒子都具有波粒二象性,德布罗意公式就是描述微观粒子波粒二象性的基本公式.

波粒二象性是客观物体的普遍规律,所有客观物体同时存在着粒子性和波动性.由式(17-25)可以看出,因为普朗克常数是一个及其微小的量,所以宏观物体的德布罗意波长小到难以测量的程度,因而宏观物体仅表现出粒子性的一面,而不表现出波动性的一面.

三、德布罗意物质波的意义

德布罗意提出的物质波的物理意义是什么呢?他本人并没有给出明确的回答.在经典物理学中波动性和粒子性是两个截然不同的概念,波动性和粒子性是不能同时出现的.而在量子物理学中波动性和粒子性却由一个普朗克常数联系在一起,这里的波动性和粒子性与经典物理学中的是一样的吗?这个问题引起了很多物理学家的探索与争论.问题的焦点集中在客观存在中波动性是主要的还是粒子性是主要的.

一种观点认为粒子性是主要的,而波动性是次要的,它是一种引导波,是引导粒子前进的,或者说波动性是大量粒子运动的集体表现.但是这种设想在电子的双缝干涉中却得不到证实.

光波通过双缝后的干涉现象我们已经知道.大量的电子通过很窄的双缝后的干涉现象,与光波双缝干涉相仿,如图 17.13(a) 所示,显示出大量电子的波动性.如果把入射的电子束的强度减弱,而底片受到照射的时间足够长的话,仍然会出现干涉条纹.进一步减小电子束的强度,使电子一个一个地发射,这时电子通过狭缝 1 的话,就不会通过狭缝 2,通过狭缝 2 的话,就不会通过狭缝 1,这是粒子性的典型特点.那么在长时间照射后,每个狭缝通过的电子的强度应该如图 17.13(b) 所示,在狭缝后的底片上的电子强度是双缝后电子强度的叠加,应该如图 17.13(c) 所示.事实上,经过长时间的这种单个电子照射后,仍然显示出双缝干涉条纹.这一点显示出,似乎是单个电子本身就具有波动性.

另一种观点认为波动性是基本的,而粒子性只是表现.粒子是波的聚集——波包的表现.即我们看到的粒子只是一个粒子大小范围上的一个波包,粒子运动的速度就是波包的传播速度,波包的活动表现出粒子的性质.但这种设想被事实否定了.

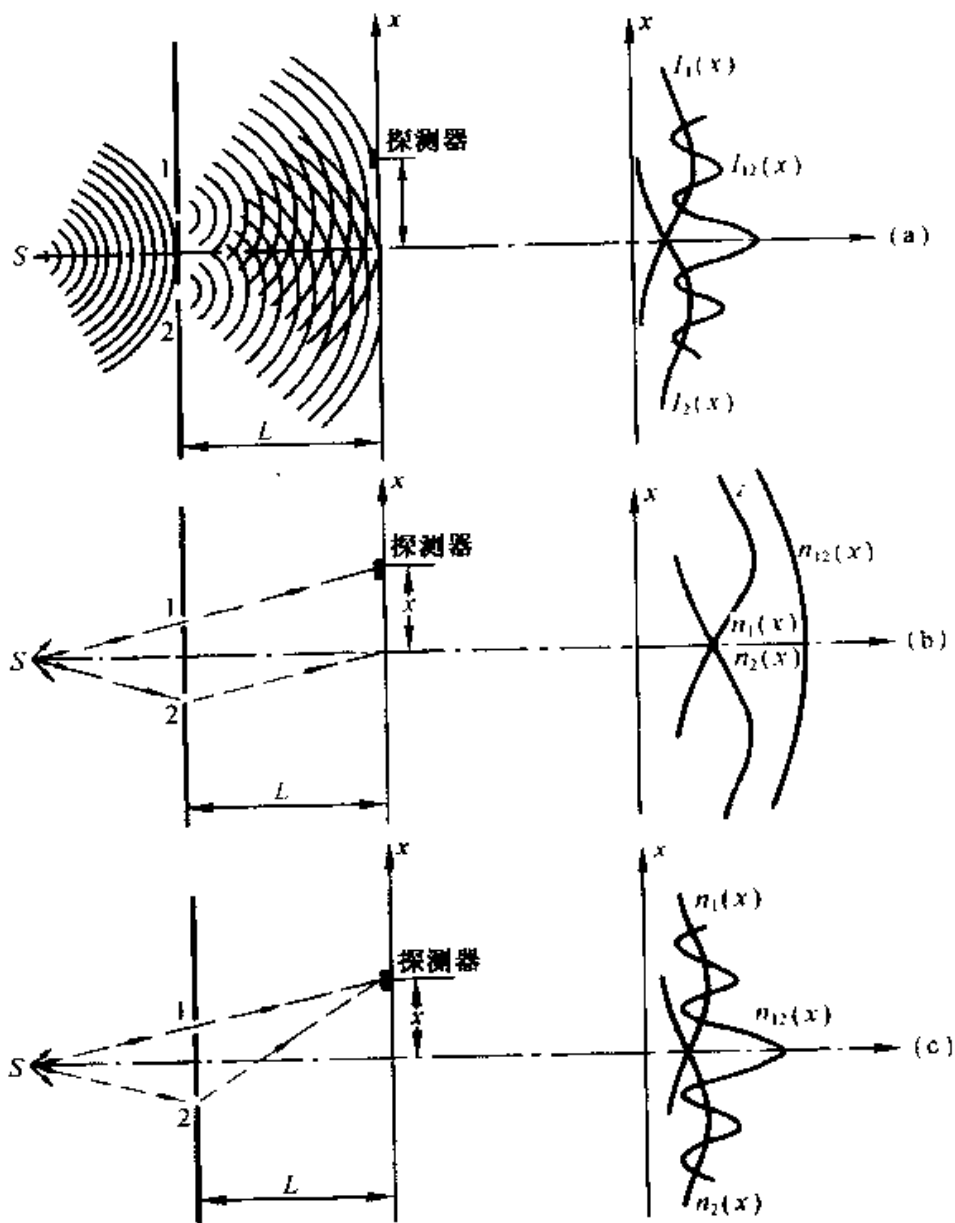


图 17.13 电子的波动性实验

波包是由许多不同频率的波叠加而成的,而不同频率的波在媒质中传播会发生扩展,波包会变得越来越大,最终变为无穷大,不再显示粒子性,而只显示出波动性,即粒子性消失了.但实验观察到的电子不会在媒质中扩展而消失.又,波在二媒质的界面上可分为反射和折射两部分,而一粒电子是不可分的.

1926年,玻恩(M. Born)提出并得到公认的关于德布罗意波实质的解释.玻恩保留了粒子的微粒性,而认为物质波描述了粒子在各处被发现的几率.这就是说,德



布罗意波是几率波, 随着以后量子力学概念的发展, 对量子力学的基础——波粒二象性的解释也在不断发展, 然而几率的概念却被保留了下来。

玻恩的几率波概念可以用电子双缝衍射的实验结果来说明, 电子双缝衍射图样和光的双缝衍射图样完全一样, 显示不出粒子性, 更没有什么概率那样的不确定特征, 但那是用大量的电子(或光子)做出的实验结果, 如果减弱入射电子束的强度, 使电子一个一个依次通过双缝, 则随着电子数的积累, 衍射“图样”将逐渐显现出来, 如图 17.14 所示, 图(a)是只有一个电子穿过双缝所形成的图像, 图(b)是几个电子穿过形成的图像, 图(c)是几十个电子穿过形成的图像, 这几幅图像说明电子确是粒子, 因为图像是由点组成的, 它们同时也说明, 电子的去向是完全不确定的, 一个电子到达何处完全是概率事件, 随着入射电子总数的增多, 衍射图样依次如(d), (e), (f) 诸图所示, 电子的堆积情况逐渐显示出了条纹, 最后就呈现明晰的衍射条纹, 这条纹和大量电子短时间内通过双缝后形成的条纹一样, 这些条纹把单个电子的概率行为完全淹没了, 这又说明, 尽管单个电子的去向是概率性的, 但其概率在一定条件(如双缝)下还是有确定的规律的, 这些就是玻恩几率波概念的核心。

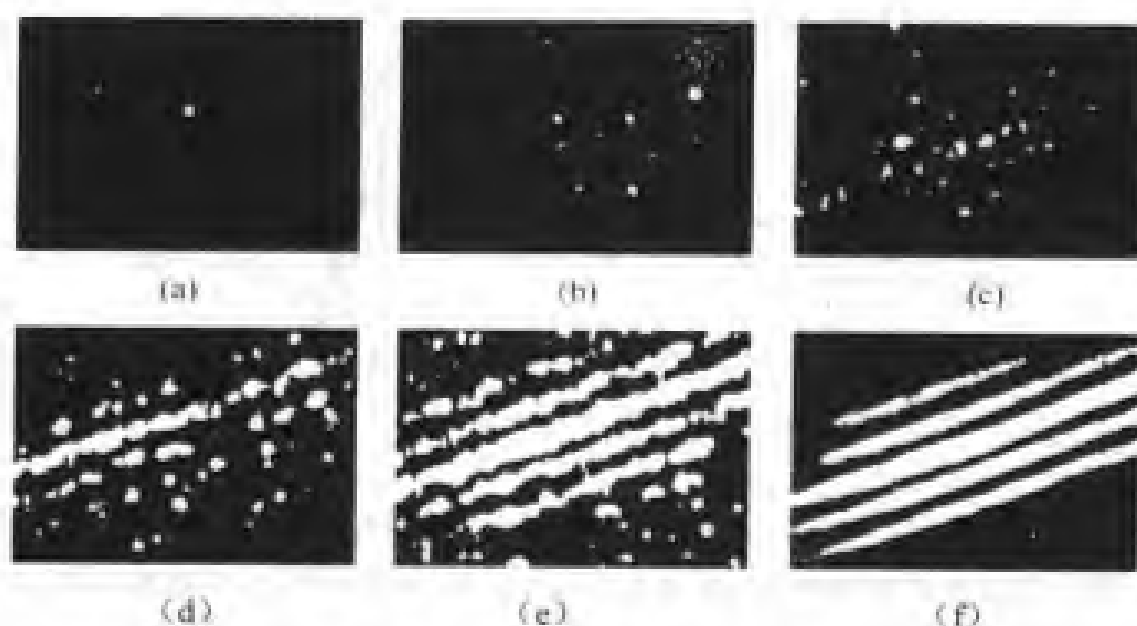


图 17.14 电子逐个穿过双缝的衍射实验结果

图 17.14 表示的实验结果明确地说明了物质波并不是经典的波, 经典的波是一种运动形式, 在双缝实验中, 不管入射波强度如何小, 经典的波在缝后的屏上都“应该”显示出强弱连续分布的衍射条纹, 只是亮度微弱而已, 但图 17.14 明确地显示物

质波的主体仍是粒子,而且该种粒子的运动并不具有经典的振动形式.

图 17.14 表示的实验结果也说明微观粒子并不是经典的粒子. 在双缝实验中,大量电子形成的衍射图样是若干条强度大致相同的较窄的条纹. 如果是经典的粒子,它们通过双缝时,都各自有确定的轨道,不是通过缝 1 就是通过缝 2. 但是,当我们设法知道每一个粒子到底是通过了缝 1 还是通过了缝 2 时,不论采取什么样的手段,在接收屏上却显现不出衍射条纹来,而是形成了如图 17.13(b) 所示的叠加的图案. 这就说明,微观粒子并不是经典的粒子.

通过大量的实验事实,可以看到微观粒子具有波粒二象性,波动性和粒子性是它的两个侧面. 对于我们的宏观测量方法来讲,或者观察到了它的波动性的一面,或者观察到了它的粒子性的一面. 我们无法同时既看到波动性,又看到粒子性,因为这在宏观的经典物理学是不可能的.

粒子的波动性已有很多的重要应用. 例如,由于低能电子波穿透深度较 X 光小,所以低能电子衍射被广泛地用于固体表面性质的研究. 由于中子易被氢原子散射,所以中子衍射就被用来研究含氢的晶体. 电子显微镜利用了电子的波动性更是大家熟知的,由于电子的波长可以很短,电子显微镜的分辨能力可以达到 0.1nm .

四、应用举例 —— 电子显微镜

借助光学显微镜,人们能用肉眼直接看到细胞、细菌和其他微生物,分辨本领达 10^{-1}mm 左右. 但是,不管放大倍数多大,比 10^{-4}mm 还小的东西始终看不清了,这是因为在光学显微镜中,利用点光源所发的光波进入显微镜时,由于光的衍射,使成的像不是一个完全清晰的点,而是有一定大小的光斑. 随着生产和科学技术的发展,人们对微观世界的探索要求越来越迫切,于是推动科学家发明了电子显微镜. 1931 年,德国柏林大学鲁斯卡(E. Ruska)发明了世界上第一台透射式电子显微镜. 电子显微镜的发明开创了物质微观世界研究的新纪元,因此鲁斯卡获得 1986 年诺贝尔物理学奖.

1. 为什么用电子束代替光

要提高成像分辨率必须改用波长比可见光短得多的射线. 电子具有波动性,可以计算不同能量的电子束所相应的波长 λ . 在电子显微镜中通过对电子的加速来提高电子的动能,从而缩短电子的波长. 若加速电子所用的高压为 $U(\text{V})$,电子被加速到最大的动能为 eU ,则可得电子波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} = \frac{1.226}{\sqrt{U(\text{V})}} (\text{nm})$$

注意到上式是非相对论公式. 当 $U > 10^5$ 伏时, 电子速度就接近光速, 要用下面相对论公式计算 λ :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU(1 + \frac{eU}{2m_0 c^2})}} = \frac{1.226}{\sqrt{U(1 + 0.9785 \times 10^{-6}U)}} (\text{nm})$$

表 17-1 是常用加速电压下电子的波长.

表 17-1 常用加速电压下电子的相应波长

加速电压 $U(\text{kV})$	60	80	100	200	500	1000
电子波长 (nm)	0.00486	0.00417	0.00370	0.00250	0.00142	0.00087

由上表可见, 当 $U = 10^5$ 伏时, 电子波长约为 4×10^{-3} 纳米, 要比可见光小 5 个数量级. 在一般电子显微镜(俗称电镜)中, 从电子枪出来的电子束正是得到了 10^5 伏以上的电压的加速, 所以电子的波长已经远比原子的半径(0.1—0.2nm)小, 因此可用这种高能电子作为探针来探测样品中原子的分布情况. 目前电镜在医学、生物学、材料科学等领域得到了广泛的应用.

我国电镜技术研究开始较迟, 在 1958 年, 我国自行设计和制造了第一台分辨率为 10nm、放大倍数为 2 万—3 万倍的 DX-10A 型的三级电镜, 首次填补了我国电镜技术的空白. 到 1977 年成功地制成 80 万倍、分辨率为 0.14nm 的大型电镜, 使我国电镜技术进入世界行列.

2. 电子透镜

有了短波长的电子束, 要制成显微镜, 还必须像光学显微镜一样, 要有复杂的“透镜”组, 使电子束会聚到样品上, 然后成像和放大. 对电子束所用的“电子透镜”, 当然不是用玻璃做的, 而是用电磁镜, 即利用通电线圈所产生的一定分布的磁场来控制电子束运动, 完全类似光学显微镜, 也有聚光镜、物镜和投影镜之分. 它们的功能是使电子束会聚到样品上, 通过物镜成像, 再通过投影镜, 最后在荧光屏上得到放大的像. 图 17.15 是光学显微镜、透射电子显微镜(俗称透射电镜)和扫描电子显微镜(俗称扫描电镜)的对照示意图.

3. 两种电镜装置

目前常用的电镜有两种: 一是透射式电镜, 这是通常所讲的电子显微镜; 二是扫

描电子显微镜.

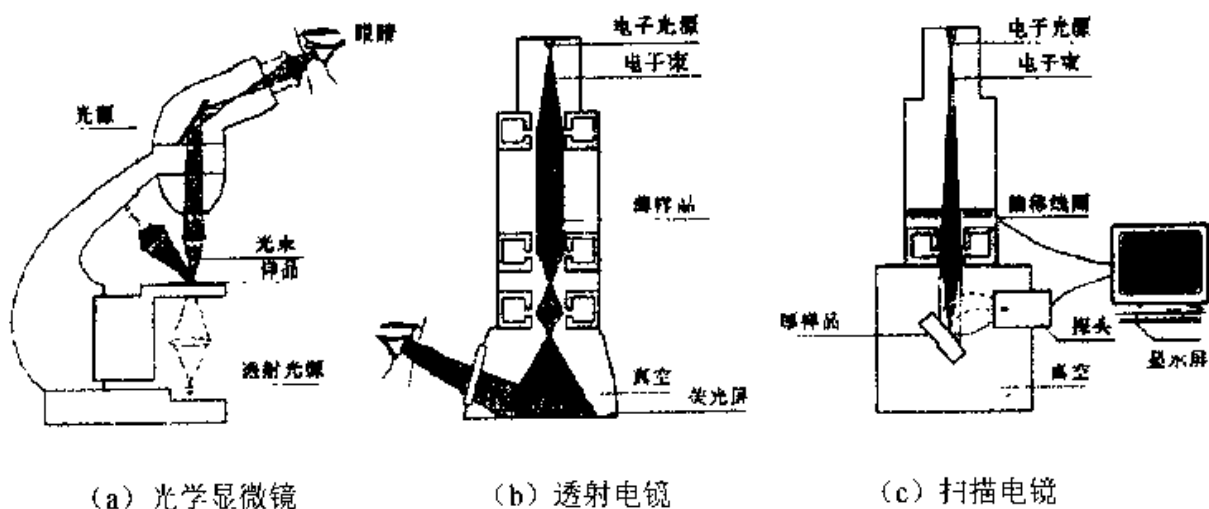


图 17.15 三种显微镜对照示意图

(1) 透射电镜

透射电镜的外形如图 17.15(b) 所示. 在直立镜筒中, 高压电缆从顶部进入镜筒. 顶部装有电子枪, 中部的电子透镜系统起着聚光成像与放大作用, 下部是观察记录的荧光屏. 当电子影像射到荧光屏上时, 由于电子激发荧光物质而产生荧光, 便可在屏上看到标本的放大像, 荧光屏下面为照相室, 内装照相底片. 移开荧光屏, 则可将影像直接投到底片上.

由于透射电镜成像记录的是与样品发生过相互作用而从标本穿透出来的电子, 而电子穿透样品的能力较低, 故要求标本制作得很薄, 约 $0.2\mu\text{m}$. 另外, 透射电镜是以高速电子作为工作媒质, 所以镜筒内要求保持高真空度(达 $1.33 \times 10^{-5}\text{Pa}$), 否则电子与残余气体原子相碰, 引起电离和放电、造成灯丝被腐蚀、样品被沾污等. 此外, 现代透射电镜为达到更高分辨率, 要求电压和电流非常稳定, 飘移不能超过十万分之一, 甚至要求达到百万分之一左右. 这种稳定性要求必须依靠非常精确的电路来控制, 才能得到实际样品的结构图像.

(2) 扫描电镜

实际不是所有样品都能制得很薄, 加上在具体应用中对有些样品只需观察其表面的细节, 于是 1942 年制成了第一台扫描电镜, 主要用来获取和分析厚样品表面的微观信息. 目前扫描电镜的放大倍数超过一百万倍, 分辨率可达 1nm .

扫描电镜也有电子枪和电磁透镜, 但这里电磁透镜的作用是产生直径约 1nm 的很细的电子束, 打到样品上. 利用扫描线圈使电子束产生偏转, 并一行一行地扫描样

品表面某一特定的区域. 由于只研究表面情况, 无需穿透样品, 所以扫描电镜的电压约在 200V—30kV. 图 17.15(c) 是扫描电镜示意图, 利用探头接收从样品上反射回来的背散射电子和从样品中原子的外层击出的低能电子(称为二次电子, 以区别于入射电子), 最后在显像管的荧光屏上得到反映样品表面形貌的图像. 二次电子一般产生在样品表面下 1—10nm 的区域, 它是研究样品表面形貌最有用的电子信息区. 背散射电子是入射电子受到标本中原子核散射回来的电子, 来自于样品内部深一点地方(约 100nm), 利用背散射电子的衍射图可研究材料样品内部的晶体学特性.

电镜技术对医学、生物学、材料科学的发展起着重要作用, 使基础医学研究从细胞水平进入到分子水平. 例如, 可以迅速确定生物大分子、脱氧核糖核酸(DNA) 的详细结构, 也可以看到病毒和细菌的内部结构, 因此, 电镜已成为医学基础研究不可缺少的主要工具之一.

§ 17.5 不确定关系

在经典的牛顿力学中, 质点的运动都沿着一定的轨道, 在轨道上任意时刻质点都有确定的位置和动量, 只要知道了粒子的初始位置和速度(动量), 知道了粒子以后所受的力, 那么即可知道粒子在以后任何时刻的位置和速度(动量). 这就是经典的决定论观点, 我们或者把它叫做因果律. 这种方法在宏观世界, 例如对天体物理、人造卫星的运动规律的描述, 得到了巨大的成功. 那么这条规律在微观领域是否适用, 能否象能量守恒、角动量守恒那样推广到微观领域呢?

在经典力学的概念中, 用位置和动量来描述一个质点在一时刻的运动状态, 一个粒子的位置和动量是可以同时精确测定的. 在量子理论发展后, 揭示出: 要同时测出物体的位置和动量, 其精确度是受到一定限制的, 这个限制来源于物质的二象性.

在量子理论的观念中, 由于其粒子性, 可以谈论它的位置和动量, 但由于其波动性, 它的空间位置需要用几率波来描述, 而几率波只能给出粒子在各处出现的概率, 所以在任一时刻粒子不具有确定的位置, 与此相联系, 粒子在各时刻也不具有确定的动量. 这也可以说, 由于二象性, 在任意时刻粒子的位置和动量都有一个不确定量. 量子力学理论证明, 在某一方向, 例如 x 方向上, 测量一个粒子的位置时, 如果不确定范围是 Δq , 那么同时测得该方向上的这个粒子的动量也有一个不确定范围 Δp , Δp 和 Δq 的乘积总是大于一个特定的数值

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{\hbar}{2} \quad (17-27)$$

式中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, 式(17-27)由海森堡(W. Heisenberg)推得, 叫做不确定关系(旧称测不准关系), 它直接来源于物质具有波粒二象性. 下面我们借助于电子单缝衍射实验来粗略地推导并验证这一关系.

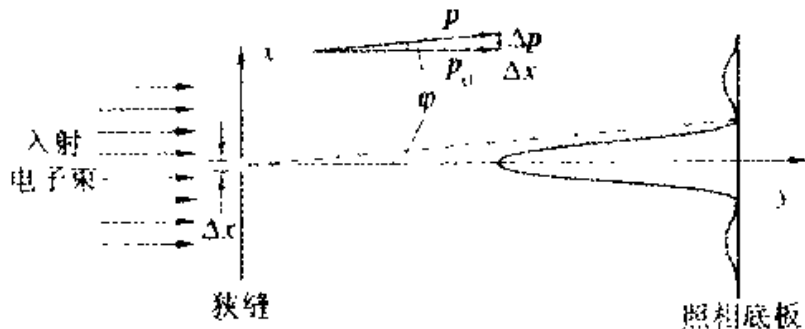


图 17.16 电子单缝衍射示意图

如图 17.16 所示, 一束动量为 p_x 的电子通过宽为 Δy 的单缝后发生衍射而在屏上形成衍射条纹. 让我们考虑一个电子通过缝时的位置和动量. 对一个电子来说, 我们不能确定地说它是从缝中哪一点通过的, 而只能说它是从宽为 Δy 的缝中通过的, 因此它在 y 方向上的位置不确定范围就是 Δy . 它沿 y 方向的动量 p_y 是多大呢? 如果说它在缝前的 p_y 等于零, 在过缝时, p_y 就不再是零了. 因为如果还是零, 电子就要沿原方向前进而不会发生衍射现象了. 屏上电子落点沿 y 方向展开, 说明电子通过缝时已有了不为零的 p_y 值. 忽略次级极大, 可以认为电子都落在中央亮斑内, 因而电子在通过缝时, 运动方向可以有 θ_1 角的偏转. 根据动量的矢量合成, 可知一个电子在通过缝时在 y 方向动量的分量的大小 p_y 为下列不等式所限:

$$0 \leq p_y \leq p \sin \theta_1$$

这表明, 一个电子通过缝时在 y 方向上的动量不确定量为

$$\Delta p_y = p \sin \theta_1$$

考虑到衍射条纹的次级极大, 可得

$$\Delta p_y \geq p \sin \theta_1$$

由单缝衍射公式, 暗纹的角位置 θ 由下式决定:

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{m\lambda}{\Delta y}$$

m 取 1 得到第一级暗纹的角位置 θ_1 :

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

上式代入 Δp_x 的表达式, 得到

$$\Delta p_x \cdot \Delta y \geq p\lambda = \frac{h}{\lambda} \cdot \lambda = h$$

这是从第一极小值处的偏转角 θ_1 和最大的缝宽 Δy 计算出的结果, 实际的位置不确定度的平均值 Δy 和偏转角的平均值都要小于上述值, 计算出的 $\Delta p_x \cdot \Delta y$ 值还要小些.

不确定关系表明, 如果要把粒子的动量非常精确地测定, $\Delta p \rightarrow 0$, 那么位置就非常不确定, 即 $\Delta q \rightarrow \infty$, 也就是说, 不能限制粒子行进的道路, 只有在自由粒子时才能精确获得其动量. 反之, 要位置精确测定, 动量就非常不确定. 这表明在测量粒子的位置和动量时, 它们的精度存在着一个终极的不可逾越的限制.

除了位置和动量的不确定关系外, 不确定关系也存在于对粒子的能量和时间测量的精度上. 考虑在一段时间 Δt 内的测量一个粒子能量的不确定度 ΔE , 则有

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (17-28)$$

这个关系式可以用量子力学的方法推得, 也可以由位置和动量的不确定关系导出. 根据相对论的动量能量关系

$$E = mc^2 = [p^2 c^2 + m_0^2 c^4]^{1/2}$$

微分, 得

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} [p^2 c^2 + m_0^2 c^4]^{-1/2} \cdot 2c^2 p dp \\ &= \frac{c^2}{E} p dp = \frac{p dp}{m} = v dp \end{aligned}$$

则有
$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta p \cdot v \Delta t = \Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}$$

不确定关系不仅存在于位置和动量、能量和时间之间, 实际上, 凡是经典力学中具有共轭关系的两个物理量之间都存在着不确定关系. 例如

$$\begin{aligned} \Delta p_x \cdot \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_y \cdot \Delta y &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_z \cdot \Delta z &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

§ 17.6 薛定谔方程 波函数的统计解释

在德布罗意的物质波概念提出后,立即引起了轰动.当物质波的概念传到苏黎世时,物理学家德拜建议他的学生薛定谔作一场报告,介绍物质波这个新概念.报告后,德拜告诉薛定谔,“既然有了波,就应该有一个波动方程”.于是薛定谔开始着手寻求建立一个波动方程.在德布罗意关于物质波的假设中没有这种方程,他只是把光的二象性类推到实物粒子.很快,薛定谔就得到了一个方程,这就是以后著名的薛定谔方程——量子力学的基本方程,所有量子力学问题都是由解薛定谔方程而得到.薛定谔由波动性引入波动方程所建立的量子力学形式也称波动力学.量子力学的另一种形式是1925年左右由海森堡、波恩、泡利等从粒子性出发,用矩阵的形式来描述粒子和粒子体系的运动规律的矩阵力学.后来证明这两种理论是完全等价的.

由薛定谔方程得到的解叫做波函数,它相应于物质波的振动幅度随时间、位置变化的一个函数.关于波函数的物理意义,怎样从哲学意义上理解波函数或者说薛定谔方程的解,构成了哥本哈根学派的另一个核心内容:波函数的统计诠释.

一、薛定谔方程

薛定谔方程在量子力学中的地位和作用相当于牛顿方程在经典力学中的地位和作用.用薛定谔方程可以求出在给定势场中的波函数,从而了解粒子的运动情况.作为一个基本方程,薛定谔方程不可能由其他更基本的方程推导出来,它是量子力学的一个基本假设,只能通过某种方式建立起来,然后看其所得的结论应用于微观粒子时是否与实验结果相符.薛定谔当初就是“猜”加“凑”出来的.

为了便于理解起见,我们借助力学中平面波的波动方程“推导”出量子力学中的薛定谔方程.

波动方程是建立位移和时间关系的方程.在力学中,典型的平面波动方程是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)S = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

它的典型解是

$$S = Ae^{i(k \cdot r - \omega t)}$$

在量子力学中,我们也把平面波的波函数设想成类似于上式的形式,并用 Ψ 表示

$$\Psi = Ae^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (17-29)$$

在指数中提出 $\frac{i}{\hbar}$

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\hbar k \cdot r - \hbar \omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

上述形式的波函数我们称作平面波的波函数,或自由粒子的波函数.

上述形式的波函数对时间 t 求偏导

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \cdot Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi$$

变形后

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi \quad (17-30)$$

我们把(17-30)式左边的 $i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 称作能量算符,在量子物理中用它来代表能量

$$E \Rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (17-31)$$

与上述得到能量算符的过程类似,自由粒子的波函数对坐标求二次偏导,可以导出在量子物理中代表动量的动量算符

$$\mathbf{p} \Rightarrow -i \hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (17-32)$$

根据经典力学中自由粒子的能量和动量的关系 $E = \frac{p^2}{2m}$,将该式两端同乘以 Ψ ,并将关系中的能量、动量分别用能量算符和动量算符替换,得到

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \quad (17-33)$$

这个方程称自由粒子的薛定谔方程.如果在力场中,粒子还将有势能 U ,粒子的能量和动量之间的关系为

$$E = \frac{p^2}{2m} + U$$

同样,将该式两端同乘以 Ψ ,并将关系中的能量、动量分别用能量算符和动量算符替换,得到

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi + U\Psi \quad (17-34)$$

这个方程称为薛定谔波动方程,或薛定谔方程。

薛定谔方程的建立过程中没有严格的数学推导,只是用了与经典力学类比的方法得到的。在量子力学中,薛定谔方程是作为一个基本假设之一引入的,没有更基本的原理来推导它,它的正确与否,它能看它的解是否与客观事实符合。

如果所给定的势场 U 不显含时间 t , 可以用分离变量的方法简化薛定谔方程。令 $\Psi(r, t) = \psi(r) \cdot T(t)$, 则只与位置坐标有关的 $\psi(r)$ 称为定态波函数, 它满足的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + U(r)\psi = E\psi \quad (17-35)$$

称为定态薛定谔方程。为了方便理解,我们常常简单地求解一维情况的薛定谔方程,用一维情况的结论来理解量子物理的一些很深奥的结论。在一维情况时,定态薛定谔方程简化为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + U(x)\psi = E\psi \quad (17-36)$$

二、波函数及其统计解释

关于薛定谔方程需要说明,它的解一般是位置和时间的函数,我们把它记作 $\Psi(r, t)$, 对应经典物理的意义,它相当于描述该位置、该时刻波的振幅的大小。而且薛定谔方程是线性微分方程,作为方程的解的波函数 $\Psi(r, t)$ 或 $\Psi(r)$ 都满足叠加原理,这正是波的振幅叠加原理所要求的。

从数学上来说,对于任何能量 E 的值,方程(17-34)和(17-35)都有解,但并非对所有 E 值的解都能满足物理上的要求。在经典物理中描述一个实物粒子的运动状态的量必须满足单值、有限和连续,这些要求也是作为所有物理量应该满足的基本要求。而作为有物理意义的波函数,也应该满足单值、有限和连续的条件,这些条件叫做波函数的标准条件。令人惊奇的是,根据这些条件,由薛定谔方程“自然地”、“顺理成章地”就能得出微观粒子的重要特征——量子化条件。这些量子化条件在普朗克和玻尔那里都是“强加”给微观系统的。作为量子力学基本方程的薛定谔方程当然还给出了微观系统的许多其他奇异的性质。

薛定谔方程的解,作为物理量的波函数 $\Psi(r, t)$ 或 $\Psi(r)$ 的物理意义是什么呢?

或者说由波粒二象性引入的德布罗意物质波有什么样的物理意义?而由德布罗意波引出了波函数,这个波与经典意义上的波是否是同一个波呢,或者说这两种波在概念上是相同的吗?

我们首先可以肯定地回答:德布罗意波与经典意义上的波是完全不同的概念,从根本上就不能与经典意义上的波的概念相提并论.

例如,对实物粒子,德布罗意波的波长和频率是

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h}$$

按经典概念, $\lambda\nu$ 应该是波速

$$v_D = \lambda\nu = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

其中 v_D 是德布罗意波速, v 是实物粒子的运动速度. 可以看到:对一般的实物粒子, v_D 将比光速大得多,只有在真空中的光子的情况下, v_D 才与光速相等,这一点在经典概念上是难以接受的.

那么德布罗意波的意义是什么呢?既然假设德布罗意波描写了微观粒子的运动状态,那它是如何来描写的呢?这就是量子力学的哥本哈根学派的核心内容:波函数的统计解释——波函数描写的是在某位置上、在某时刻发现粒子的概率. 从这一点来讲,我们有时也把德布罗意波称作概率波.

那么波函数是如何来描述粒子出现的概率呢?我们还是与经典波比较一下. 例如电磁波,其电场强度的振幅 E 在我们看来是无法直接测量的,而振幅的平方 E^2 是光的强度 I ,却是可以测量的.

对应地,我们把德布罗意波的平方 $|\Psi|^2$ 看作是粒子出现的概率,是可以直观测量的,这是量子力学的又一个基本假设:粒子在某位置、某时刻出现的概率与波函数的平方成正比.

既然波函数的模方表示发现粒子的概率,那么在整个空间发现粒子的概率应该等于 1,即:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1 \quad (17-37)$$

满足上式的波函数称为归一化波函数.

§ 17.7 一维势阱和势垒

定态薛定谔方程在物理学中有许多应用,例如氢原子、一维无限深势阱、隧道效应等,在材料科学、生命科学、半导体的掺杂、零点能的存在、纳米材料等等都有许多应用.下面将相关的定态薛定谔方程进行求解.

一、一维无限深势阱

在力场的作用下,质量为 m 的粒子,被限制在一定的范围内运动.最简单的情况是粒子在外力场中的运动是一维的情形,例如在如图 17.17 所示的一维无限深势阱的运动.在阱内,由于势能是常量,所以粒子不受力而做自由运动,在边界 $x = 0$ 和 a 处,势能突然增至无限大,所以粒子会受到无限大的指向阱内的力.因此,粒子的位置就被限制在阱内,粒子的这种运动状态被称为束缚态.



图 17.17 一维无限深方势阱

图 17.17 所示的势能可以表示为

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$$

$U(x)$ 仅是空间坐标的函数,与时间无关,可以用定态薛定谔方程,并分区域求解该问题.

在 $x \leq 0$ 和 $x \geq a$ 处,因为势函数为无限大,只有波函数为 0 才能满足薛定谔方程,由定态波函数 $\psi = 0$,得出含时波函数 $\Psi = 0$.

在 $0 < x < a$ 内有定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E\psi$$

解方程时,令 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 则

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

上述方程类似于力学中见过的谐振动方程.当 $k > 0$ 时,其通解为

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \quad (17-38)$$

式中 A, B 为待定常数, 可以由波函数的标准化条件确定它们的取值.

由 $x = 0$ 和 $x = a$ 时波函数具有连续性, 应该有 $\psi(0) = \psi(a) = 0$.

由 $\psi(0) = 0$ 得到 $B = 0$, 则定态波函数为

$$\psi(x) = A\sin kx$$

由 $\psi(a) = 0$, 得到 $A\sin ka = 0$, 解此方程得 $ka = n\pi$, 即

$$k = \frac{n\pi}{a} (n = 1, 2, \dots)$$

代入 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 的表达式得到

$$E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2ma^2} \hbar^2 (n = 1, 2, \dots) \quad (17-39)$$

从(17-39)式可见, 能量只能取一些分立值, 即能量是量子化的. 从这里可以看出, 我们只是代入了对物理量的一般要求——波函数的标准化条件, 即得到了能量量子化的结果, 比玻尔的量子化条件要自然得多.

将一维无限深势阱的波函数 $\psi_n = A\sin \frac{n\pi}{a}x$ 进行归一化, 即

$$\int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^a \psi_n^2 dx + \int_a^{\infty} 0 dx = 1$$

从而得出波函数中(17-36)式中的常数 A 为

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (17-40)$$

至此可以将一维无限深势阱的波函数写为

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & (0 < x < a) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases} \quad (17-41)$$

在 $E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2ma^2} \hbar^2$ 中, 如果 $n = 0$, 则 $E_n = 0$, 从而可得 $\psi_n(x) = 0$, 这对粒子出现的概率而言无意义, 因此量子数 $n \neq 0$, 只能从 1 开始取值.

当 $n = 1$ 时, $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ 称之为基态能量, 又称零点能, 其它能级上的能量与基态能量之间有简单的关系

$$E_n = n^2 E_1 \quad (17-42)$$

与 E_n 对应的定态波函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

概率密度为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

定态波函数及概率密度分布如图 17.18(a)、(b) 所示。

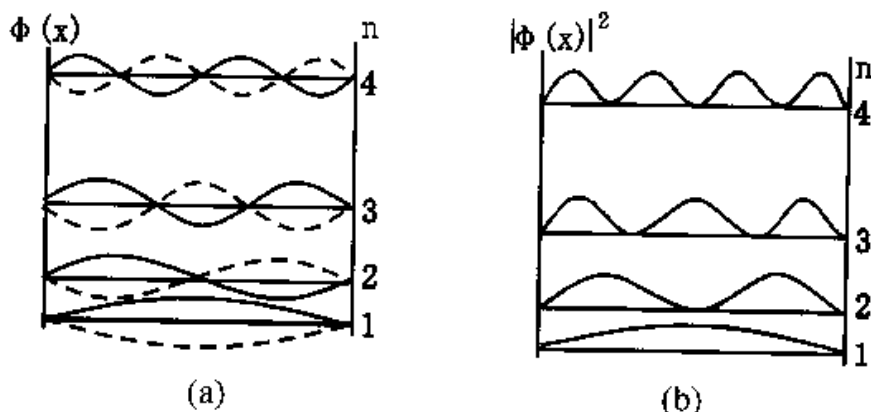


图 17.18 无限深势阱波函数、概率密度

在量子数为 n 的量子态上粒子出现的概率密度为 $\psi_n^2(x)$, 概率密度最大的数目也是 n . 例如 $n = 3$, 分别在 $\frac{a}{4}, \frac{2a}{4}, \frac{3a}{4}$ 三处概率密度最大。

相邻两能级之间的能量值相差为

$$E = E_{n-1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (2n + 1) \quad (17-43)$$

在宏观粒子运动中, 即当势阱的宽度 a 很大或粒子的质量很大时, 能级差值趋于 0, 说明能量变为连续, 这样粒子的运动过渡为宏观运动状态, 说明宏观粒子的运动状态是微观粒子量子运动状态的一种大尺寸(或大质量)的近似. 一般地说, 只有粒子运动范围接近或小于原子的限度时才具有明显的量子效应。

势阱是一种简单的理论模型. 自由电子在金属内部可以自由运动, 但很难逸出金属表面. 在此情况下, 自由电子就可以认为是处于以金属块表面为边界的无限深势阱中. 在粗略地分析自由电子的运动(不考虑点阵离子的电场)时, 就可以利用无限深方势阱这一模型。

二、一维势垒

一维势垒的模型是假设粒子处于如下势场中运动.

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0, x > a) \\ U_0 & (0 < x < a) \end{cases} \quad (17-44)$$

在一维势垒中,定态薛定谔方程为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi = 0 \quad (0 < x < a) \quad (17-45)$$

在势垒外定态薛定谔方程为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \quad (x < 0, x > a) \quad (17-46)$$

下面我们来求解一维势垒的定态薛定谔方程.

令 $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$, 则上面二式可写成

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2\psi = 0 \quad (x < 0, x > a) \quad (17-47)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2\psi = 0 \quad (0 < x < a) \quad (17-48a)$$

先考虑 $E < U_0$ 的情况. 当 $E < U_0$ 时, $k_2^2 > 0$, 方程(17-45)式的解具有如下形式

$$\psi_{1,3} = Ae^{k_1x} + A'e^{-k_1x} \quad (17-49)$$

即在势垒之外,波函数具有余弦或正弦振荡的形式.

当 $E < U_0$ 时, $k_2^2 < 0$, 则方程(17-46a)式中 k_2 为虚数, 令 $k_2 = ik_3$, k_3 是实数.

则方程(17-48a)化为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k_3^2\psi = 0 \quad (0 < x < a) \quad (17-48b)$$

该方程的解具有指数的形式

$$\psi_2 = Be^{-k_3x} + B'e^{k_3x} \quad (17-50)$$

如果有一个粒子由图 17.19 中的区域 I 入射, 根据物理规律, 在 I 区域波函数是振荡的, 在势垒区 II, $B' = 0$, 波函数是指数衰减的, 在透射的 III 区

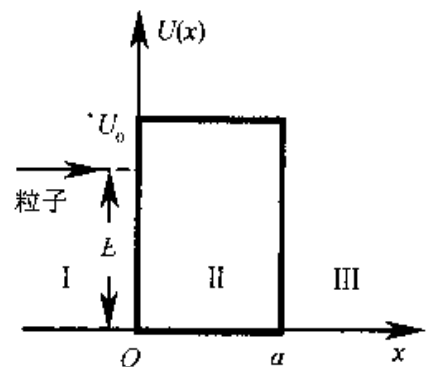


图 17.19 一维方势垒

域波函数又是振荡的. 就是说, 在 I 区域运动的粒子, 在一定的条件下, 将有可能穿透有限的势垒而出现在 III 区域内, 这个现象叫势垒贯穿或隧道效应.

再考虑 $E > U_0$ 的情况. 在 $E > U_0$ 时, k_1, k_2 都是大于零的数, 方程(17-47)、(17-48)二式的解均具有振荡的形式, 即在势垒外和势垒内的波函数都是振荡的. 在经典物理学中, 一个势垒的高度低于粒子的能量, 这样的势垒(或势阱)对粒子的运动是没有影响的. 而在量子力学中, 微观粒子在势垒(阱)内和势垒(阱)外波函数振荡的幅度和频率是不同的. 即粒子运动到势垒或势阱的位置会感受到势垒或势阱的存在, 并在运动方式和态上作出相应的反应.

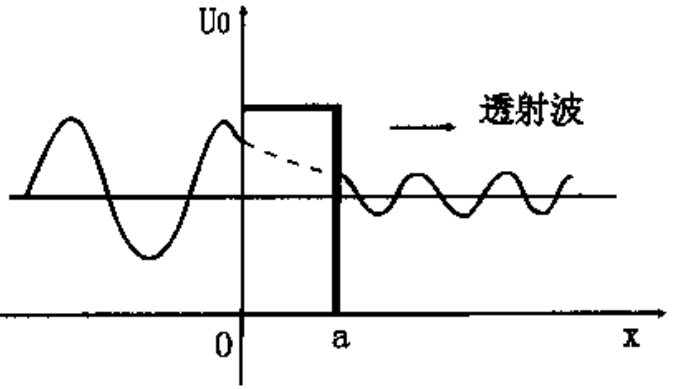


图 17.20 势垒穿透示意图

三、扫描隧道显微镜

势垒穿透现象目前的一个重要应用是扫描隧道显微镜, 简称 STM(Scanning Tunneling Microscope). 它的原理示意图如图 17.21 所示.

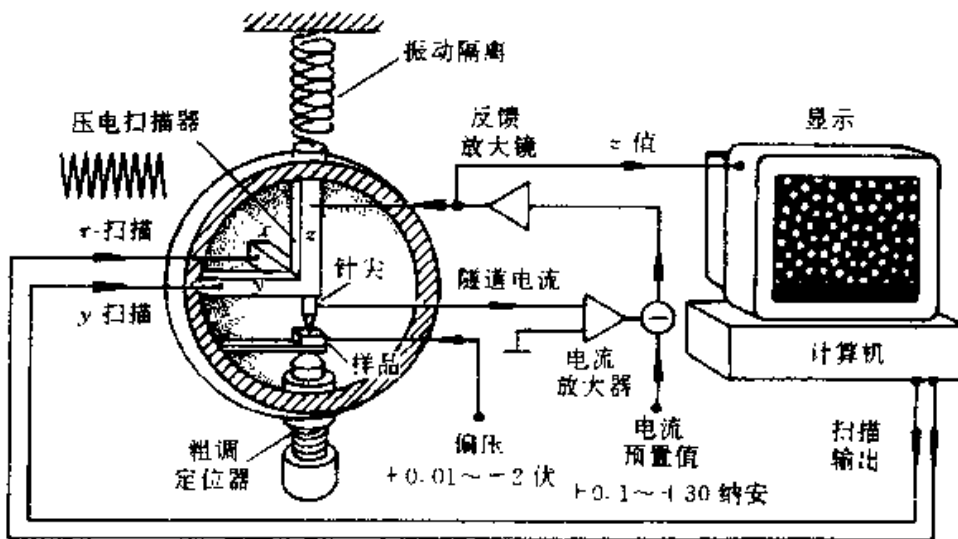


图 17.21 扫描隧道显微镜原理图

STM 的工作原理是基于量子力学中的隧道效应. 隧道效应是微观粒子所具有的特性, 即在电子能量低于它要穿过的势垒高度时, 由于电子具有波动性而具有一

定穿过势垒的几率, STM 中将极细的探针和被研究物质的表面作为两个电极, 当样品与针尖距离非常近时(通常小于 1nm), 在外电场作用下, 电子会穿过两个电极之间的势垒流向另一电极. 隧道电流是针尖的电子波函数与样品的电子波函数重叠的结果, 则当探针沿样品表面扫描时, 针尖和样品之间距离需要保持不变, 从而探针将沿样品表面的起伏而上下移动, 采集探针上下移动的数据, 并同时采集探针沿水平面扫描的坐标数据, 即获得了样品表面每一点三维坐标的数据.

在样品的表面有一表面势垒阻止内部的电子向外运动. 但正如量子力学所指出的那样, 表面内的电子能够穿过表面势垒, 到达表面外形成一层电子云. 这层电子云的密度随着与表面的距离的增大而按指数规律迅速减小. 这层电子云的纵向和横向分布由样品表面的微观结构决定, STM 就是通过显示这层电子云的分布而考察样品表面的微观结构的.

STM 不但可以当作“眼”来观察材料表面的细微结构, 而且可以用作“手”来摆弄单个原子. 可以用它的探针尖吸住一个孤立原子, 然后把该原子放到另一个位置. 这就迈出了人类用单个原子这样的“砖块”来建造“大厦”即各种理想材料的第一步. 图 17.22 是 IBM 公司的科学家在 4K 的温度下, 用 STM 的针尖一个一个地把 48 个铁原子栽到了一块精制的铜表面上, 围成一个圆圈, 圈内就形成了一个势阱, 把在该处铜表面运动的电子圈了起来, 形成“量子围栏”. 图中圈内的圆形波纹就是这些电子的波动图景, 它的大小及图形和量子力学的预言符合得非常好.

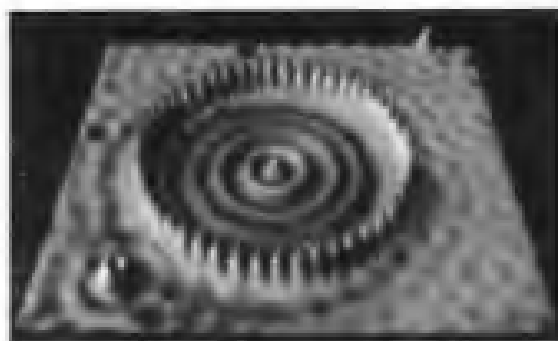


图 17.22 “量子围栏”中的电子驻波

STM 的横向分辨率已达 0.1nm , 纵向分辨达 0.01nm , STM 的出现, 使人类第一次能够适时地观察单个原子在物质表面上的排列状态以及表面电子行为有关性质.

STM 提供给科学家一个微小的实验室, 用它来研究纳米世界里的一些新奇的现象, 一些新的效应, 这是其他技术做不到的.

1981 年, IBM 公司苏黎世研究所的物理学家 G. Binnig 和 H. Rohrer 发明的扫描隧道显微镜, 观察到了 $\text{Si}(111)$ 表面清晰的原子结构, 从而使人类第一次进入原子世界, 直接观察到了物质表面上的单个原子. 为了表彰 G. Binnig 和 H. Rohrer 的突出贡献, 1986 年授予他们诺贝尔物理奖.

§ 17.8 氢原子理论简介

氢原子由一个原子核(仅一个质子)加一个电子组成,是最简单的原子.历史上对氢原子的处理由简单到复杂,由知之不多到有逐步完善的精确解,而且关于氢原子的量子力学解是量子力学问题中最简单的,也是最精确的解.

一、氢原子的薛定谔方程

氢原子中电子与原子核的相互作用库仑势能为

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (17-51)$$

$U(r)$ 仅与空间坐标有关,与时间无关,故其解为三维定态问题.将 $U(r)$ 代入定态薛定谔方程(17-33)式,并将直角坐标变换成球坐标表示,氢原子的定态薛定谔方程化为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \quad (17-52)$$

这个方程的解(波函数 ψ 可以表示为三个独立变量函数的乘积

$$\psi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \quad (17-53)$$

因为 R 只与径向变量有关,所以也称 R 为径向波函数; $Y = \Theta \cdot \Phi$ 与角动量平方有关,称 Y 为角动量平方的波函数; Φ 与角动量在 z 方向的投影有关,称 Φ 为角动量投影波函数.

求解式(17-52)需要较多较深的数学知识,这里只给出几个重要结果.

在求解径向波函数 R 的过程中,由于微分方程中的能量 E 必须等于某些值, R 才会有限,也就是说,只有这些状态能在物理上实现.

在 $E < 0$ 时, E 只能取下式的数值

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} \quad (17-54)$$

这同玻尔理论的结论完全一致,但这里得出的能量的量子化是解方程时自然地得出的.

在 $E > 0$ 时, E 取任何值都能使 R 有限,所以正值的能量是连续分布的.

同理,在推导角动量平方波函数 Y 和角动量投影波函数 Φ 时,可以得到角动量 L 和角动量投影 L_z 的值为

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (17-55)$$

$$L_z = m \hbar \quad (m = l, l-1, l-2, \dots, -l) \quad (17-56)$$

角动量及其投影满足上述关系时方程才有解,说明原子体系的角动量及其投影只能取一些分立值,角动量在空间的取向是量子化的,角动量的大小及其空间投影的大小取值也是量子化的.

通常我们称量子数 n 为主量子数,它与原子体系的能量有关;称量子数 l 为角量子数,它与轨道角动量有关;称量子数 m 为磁量子数,它与角动量在外场方向的空间投影有关.

二、氢原子中电子的概率分布

氢原子的波函数为 $\psi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$,通常也记作 $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)$.量子数 (n, l, m) 的不同即得到原子的不同的态,对氢原子来说,取定主量子数 n 时,将包含 n^2 个原子态,这些原子态具有相同的能量,我们称之为 n^2 度简并.

波函数的平方表示在空间发现电子的概率密度,归一化时应该有

$$\int \psi^* \psi dV = \int_0^\infty R^2(r) r^2 dr \cdot \int_0^\pi \Theta^2(\theta) \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \Phi^*(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi = 1 \quad (17-57)$$

而且应该是三个积分内都等于1,因为在全部的 r 范围内,或全部的 θ 范围内,或全部的 φ 范围内发现电子的概率都是1,即必然发现电子.

首先,考虑随 φ 变化时发现电子的概率,可以得到归一化后 $\Phi^* \Phi = \frac{1}{2\pi}$,表明发现电子的概率与 φ 角无关,在不同的 φ 角,在单位 φ 角变化中发现电子的概率都是相同的.

随 r 和 θ 变化发现电子的概率密度比较复杂,图17.23和图17.24画出了几种量子数组合的概率密度随 r 和 θ 变化的幅度.在电子态的表示中,通常用 s, p, d, f, g, h, \dots 等代表角量子数为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 等态.发现电子的概率密度不同,说明电子在某处的出现的机会大小不同.我们不能断定电子确实在哪一处出现过,为了描述这种情况,提出电子云的概念.

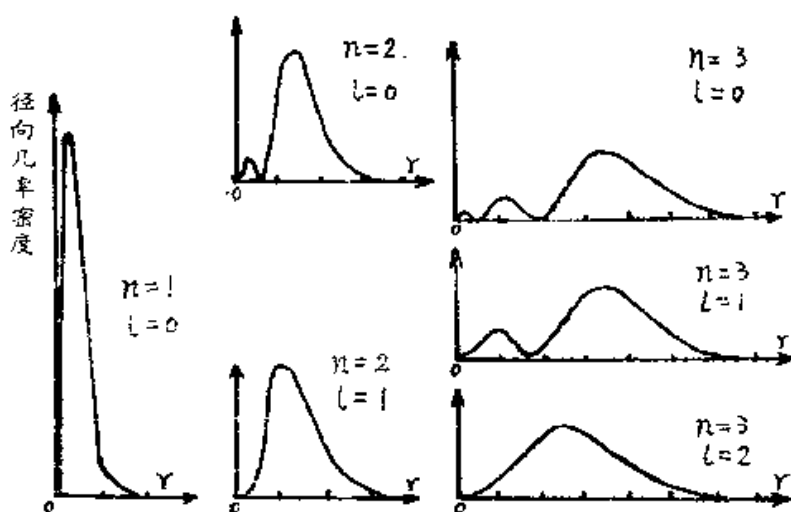


图 17.23 氢原子的概率密度与半径的关系图

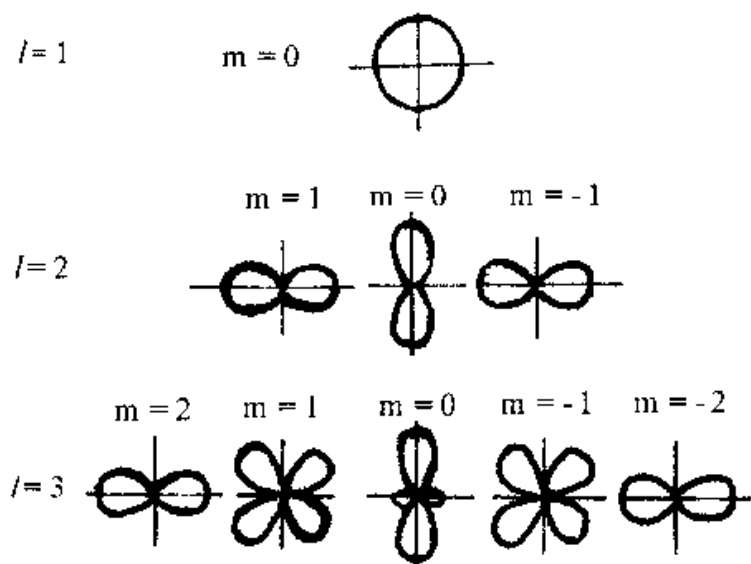


图 17.24 氢原子的 s, p, d 态电子的角分布概率密度图

§ 17.9 多电子原子中的电子分布

一、电子自旋

电子自旋概念是两位荷兰学生，乌伦贝克(G. E. Uhlenbeck)和古兹米特(S. Goudsmit)根据一系列的实验事实，于1925年提出的一个大胆假设。自旋是在经典物理基础上提出的，最初乌伦贝克和古兹米特认为自旋是由于电子具有一定的线

度,而电子像一个陀螺,在绕自身轴旋转,从而引起了自旋角动量 S ,并且认为自旋引起的角动量具有固定的值($\hbar/2$),自旋角动量在空间的投影也是只有两个固定的值.这种关于自旋的假设虽然非常好地解释了许多实验现象,例如碱金属谱线的精细结构、施特恩—盖拉赫实验的偶数分裂现象、反常塞曼效应等,但由于电子自旋的假设又有许多与经典物理学不能相容的地方,在当时引起不少人的反对.

按照传统观点,既然是自旋运动,那么每个电子都应该有自己的运动,不能认为每个电子的运动都是相同的.另外,如果电子自旋角动量是由于电子自身旋转引起的,那么电子的旋转将是非常快的,达到难以置信的程度.同学们可以验算一下,这时电子旋转时的表面线速度至少应该是 $2 \times 10^{12} \text{ m/s}$,这个速度比光速大得多,在这个速度下,很难想象电子还能保持实物粒子的性质.

正是因为自旋(角动量)这个假设有很多在经典物理中难以想象的东西,所以在自旋假设提出之初,许多物理学家不愿接受这个概念,但又不得不承认自旋的提出解决了许多过去难以解决的难题.于是当时物理学家,包括许多著名的物理学家,都处在两难的境地上.

事实上,自旋概念的完全被接受,是在质于自旋概念的提出并被验证以后,物理学家才认识到:自旋是微观物理中最重要的一个概念,它是微观粒子本身固有的,与生具来的一个禀性,不能用传统宏观的观点去和自旋找对应关系.

我们现在认识电子自旋(在以后提及自旋均指自旋角动量),就是把自旋看作是一种假设,它是电子的一种固有禀性,它的大小是

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar, \quad s = \frac{1}{2} \quad (17-58)$$

自旋量子数 $s = \frac{1}{2}$,自旋空间投影量子数用 m_s 表示, $m_s = \pm \frac{1}{2}$,自旋的空间分量为

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (17-59)$$

二、四个量子数

到目前为止,我们可以用 4 个量子数来完全描述一个原子中电子的运动状态,即

主量子数 $n = 1, 2, 3, \dots$,大体上决定电子—原子核体系的能量.

角量子数 $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$,共 n 个,决定电子绕核运动的角动量.

磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, 共 $2l + 1$ 个, 决定电子绕核运动角动量的空间取向和投影.

自旋投影量子数 $m_s = \pm \frac{1}{2}$, 决定电子自旋的空间取向和投影.

因为对任何一个电子, 它的自旋量子数 s 都是 $\frac{1}{2}$, 它不能用来区分不同态的电子, 所以不把自旋量子数 s 列入描述电子运动状态的量子数中.

对同一个 n, l 可以取的值为: $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, 共有 n 个, 分别对应为 s, p, d, f, \dots 等电子态. 例如

$$\begin{aligned} n = 1, l = 0; & \quad s \\ n = 2, l = 0, 1; & \quad s, p \\ n = 3, l = 0, 1, 2; & \quad s, p, d \\ n = 4, l = 0, 1, 2, 3; & \quad s, p, d, f \end{aligned}$$

例如, 电子处于 $n = 4, l = 3$ 的态, 则电子态可以表示为 $4f$.

三、多电子原子中的电子分布

多电子原子中的核外电子的分布遵从下列两个原理:

1. 泡利不相容原理

泡利原理是 1925 年提出的, 它认为一个原子内的任何两个电子不可能处在同一个态上. 前面讲过, 原子中电子的态由 4 个量子数确定, 即一个原子不可能存在量子数 (n, l, m_l, m_s) 完全相同的电子, 这就是泡利不相容原理. 如: ${}^2\text{He}$, 核外电子有两个, 假设都处于 $1s$ 态, 则 $n = 1, l = 0, m_l = 0$ (这三个量子数都相同), 所以 m_s 只能一个取 $1/2$, 另一个取 $-1/2$, 即量子态为 $(1, 0, 0, 1/2)$ 和 $(1, 0, 0, -1/2)$.

按照泡利不相容原理, 主量子数 n 或轨道角量子数 l 值取定后, 其中可以容纳的电子数是确定的. 我们称 n 取定时的电子为处在同一壳层, 而把 l 取定时称为处在同一支壳层. 那么同一支壳层上可容纳的电子数为

$$N_l = 2(2l + 1) \quad (17-60)$$

壳层 n 上可容纳的电子数为

$$N_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2 \quad (17-61)$$

通常用 K, L, M, N, O, \dots 表示 $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 壳层, 而用 s, p, d, f, g, \dots 表

示 $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 支壳层.

各壳层、支壳层可容纳的电子数如表 17-2 所示.

表 17-2

n	N_l	L	N_l							N_n
			0	1	2	3	4	5	6	
			s	p	d	f	g	h	i	
1	K		2							2
2	L		2	6						8
3	M		2	6	10					18
4	N		2	6	10	14				32
5	O		2	6	10	14	18			50
6	P		2	6	10	14	18	22		72
7	Q		2	6	10	14	18	22	26	98

2. 能量最低原理

一般地,多电子原子的能级由主量子数 n 和角量子数 l 共同决定. 主量子数 n 越大的主壳层其能级越高; 在同一壳层内, 角量子数 l 越大的支壳层其能级越高. 但也有例外, 实际上能级的高低次序需要用实验来确定. 对子量子数不大的几个壳层, 能级可以按下列顺序由小到大排列

$$1s \quad 2s \quad 2p \quad 3s \quad 3p \quad 4s \quad 3d \quad 4p \quad 5s \quad 4d \quad 5p \quad 6s \quad 4f \quad 5d \quad 6p \quad 7s \quad 6d \dots$$

当原子处于正常状态时, 原子中的电子尽可能地占据未被填充的最低能级, 这一结论叫做能量最低原理. 能级越低、离原子核越近的层, 首先被电子填满, 其余电子依次分别填入可能占取的最低能级.

§ 17.10 激 光

1898 年威尔斯在科幻小说“星球大战”一书中曾描述: 火星上使用一种叫“死光”的武器烧毁了地球上的森林、砖石, 熔化了钢铁……, 给人类以毁灭性的打击.

爱因斯坦在这种幻想的启发和对光电效应的研究下, 于 1916 年推测, 在一定条件下, 原子或分子可以吸收和辐射光子, 并借助外来的能量把光子激励起来, 放大后重新发射出来.

1960 年米斯曼在实验室生产了最早的红宝石激光器, 其强度比太阳光还强百亿倍.

1980年由超外差红外分光仪测知,火星是天然产生激光的星体,因为火星被 CO_2 包围,它在一天中可连续产生相当于1000个核反应堆的能量,其激励源是太阳光。

现在激光在生产、科技上引起了巨大的变革,促进了许多新兴学科如全息激光、非线性光学、光化学等等的发展,这些发展在于激光与普通光源相比有着无可比拟的优越性。

激光就是受激原子的光放大辐射。激光的英语单词是 Laser(Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation),其基本原理是将受激放大技术从电磁波的微波段推广到可见光波段而实现的。

一、自发辐射受激辐射

辐射场与物质相互作用有3种不同的方式。

1. 自发辐射

处于高能态的原子,在无外界影响的条件下会自发地从高能态 E_2 向低能态 E_1 跃迁,同时放出光子,这就是自发辐射。如图17.25(a)所示。

自发辐射是各个原子独立进行的,发光时间参差不齐,其偏振化方向、传播方向各不相同。对大量原子而言,它们可能处在不同的高能态,从而辐射光子的频率 ν 不同,且无恒定的相位差,所以自发辐射的光不是相干光,普通光源就是通过自发辐射而发光的。

2. 受激辐射

处于高能级 E_2 的原子在外来光子 $h\nu$ 的激励下,回到低能级 E_1 ,并放出频率与入射光子频率相同的光子 $h\nu$,这种由于外来光的激励,使原子从激发态跃迁到低能态,并伴随辐射频率相同的两个光子的过程称之为受激辐射。如图17.25(b)所示。

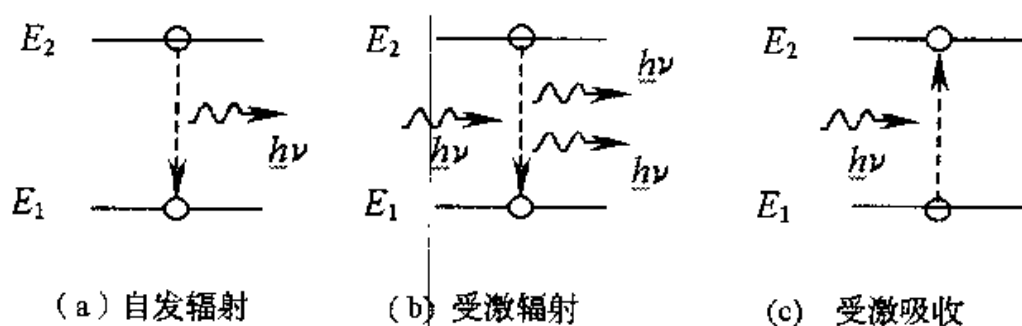


图 17.25 三种辐射

应当明确,只有在外来光的激励下,并且满足跃迁定则(量子力学中有一定的要

求)时才能产生受激辐射,产生的新光子与外来光子的特性完全相同(频率、相位、偏振方向等),所以通过受激辐射所发射的光是相干光.

辐射光的总能量 $E = \sum h\nu$, 所以通过受激辐射后,发射光的能量增加了一倍,从而实现了光的辐射放大作用,这一点是产生激光的基本点和关键所在.

3. 受激吸收

处于低能态的原子在外界激励作用下,吸收外来光子从低能态 E_1 跃迁到高能态 E_2 的过程称之为受激吸收,如图 17.25(c) 所示.

一般来说,上面 3 种作用方式同时存在,在热平衡状态,单位时间内从单位体积的物质中由低能态通过受激吸收跃迁到高能态的原子数等于受激辐射和自发辐射回到低能态的原子数.

二、激光原理

由以上三种辐射方式可知,要实现光的放大作用,获得激光的条件是使受激辐射作用大于自发辐射和受激吸收的作用,要实现这一点的关键是使处于高能态的粒子数 N_2 远大于低能态的粒子数 N_1 , 这种分布称之为粒子数反转.

在热平衡下,即使工作物质有外界的激励作用,但构成工作物质的大量原子处于各能态上的数目服从统计规律,即玻耳兹曼分布定律

$$N_i = N_0 e^{-E_i/kT}$$

N_i 为处于 E_i 能级上的粒子数, N_0 为常数.

设两能级 E_m, E_n , 且 $E_m > E_n$. 当 $E_m - E_n \ll kT$ 时, 则 $\frac{N_m}{N_n} = e^{-(E_m - E_n)/kT} \approx 1$, 即能级间距相差很小, 两能级上的粒子数相等.

如果 $E_m - E_n \gg kT$ 时, $\frac{N_m}{N_n} = e^{-(E_m - E_n)/kT} \rightarrow 0$, 即在热平衡状态下, 绝大多数粒子处于低能态上, 亦即在热平衡时受激吸收占主导地位, 不能满足 $N_2 \gg N_1$ 的条件.

要使得 $N_2 \gg N_1$, 实现光放大, 必须打破热平衡, 使“受激辐射 $>$ 自发辐射 + 受激吸收”, 达到粒子数反转. 但一般达到粒子数反转分布的系统并不稳定, 大量粒子又会通过自发辐射和受激辐射回到低能态, 恢复热平衡. 所以, 要得到连续不断的光放大效果, 就需要外界连续不断地打破热平衡状态, 造成恒定的粒子数反转状态.

1. 激励源是产生激光的外界条件

要实现粒子数反转, 需要打破热平衡状态, 就需要外界给工作物质源源不断地

输送能量,即需要激励源的持续作用,所以,激励源是产生激光的必要的外界条件. 外界的激励可以通过光电(He-Ne, CO₂ 等激光)、电流和光照等.

2. 粒子数反转是产生激光的必要条件

有了激励源,并非所有的物质都能实现粒子数反转,因为大多数物质,处于高能态的原子的寿命约 10^{-8} 秒,极短!在这极短的时间内会自发跃迁到低能态,即受激辐射不占主导地位,使得 $N_2 > N_1$ 难以实现. 但自然界有些物质,如 Cr, Ne, CO₂, Kr 等它们具有亚稳态结构,原子在亚稳态上的寿命较长(ms 量级). E_2 不能很快地跳到 E_1 ,从而外界不断地供给能量, E_2 就可以积累数量可观的粒子数,以致使得 $N_2 \gg N_1$,这样就保证了受激辐射占主导地位. 具有亚稳态能级的介质称为激活介质.

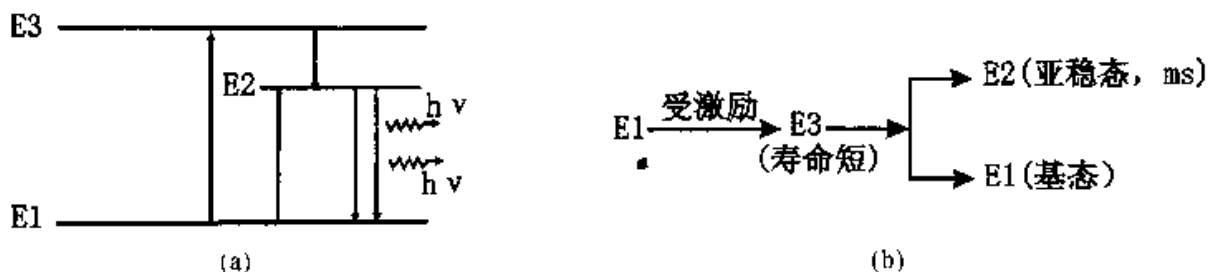


图 17.26 粒子数反转

3. 谐振腔是产生激光的充分条件

如图 17.27 所示,激活介质中当粒子数达到反转状态下,要得到较强的激光辐射,必须外界有较强的激励作用,外界单色光(激励源)的能量密度越大,介质受激辐射的几率越大,所获得的激光强度自然也越强.

腔体越长,激励光走的路程越长,诱导的激光能量密度越大,但不可能把腔体作得无限长,为此在激光谐振腔的两端设置全反射镜和部分反射镜 M_1 和 M_2 ,使腔体内光子经 M_1 与 M_2 又回到腔内,继续激励辐射,在腔内就象雪崩一样产生更多的光子, M_1 与 M_2 使腔体达到了无限长,从而使光强不断地放 M_1 大. 对于偏离腔轴的光子,在腔体内经几个来回后会逸出腔外,从而保证由部分反射镜输出的激光的方向性.

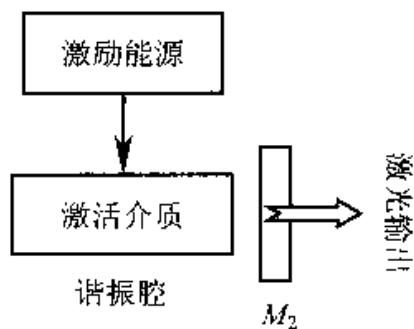


图 17.27 光学谐振腔

在腔体内光波在 M_1 与 M_2 之间来回反射产生叠加而形成驻波,即只有满足 nL

$= \frac{k\lambda}{2}$ 的光波才能在振荡过程中产生激光, 式中 n 为激活介质的折射率, k 为正整数, λ 为波长, L 为腔长. 对于波长 λ 不满足上式的光, 在振荡过程中将会衰减, 最后被消除, 可见激光谐振腔能够保证输出的激光单色性.

4. 阈值条件

在激光谐振腔内, 除了有光的增益, 还存在工作物质对光的吸收、散射以及反射镜的吸收和透射等造成的各种损耗, 只有当光在谐振腔内来回一次所得的增益大于等于损耗时, 才能形成激光. 增益大于损耗的条件称为阈值条件.

三、激光的特性和应用

1. 方向性好

判断方向性好的物理量是发散角 $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi$ 越小, 方向性越好. 平行光的发散角, $\Delta\varphi \rightarrow 0$; 普通光源: $\Delta\varphi = 4\pi\text{rad}$, 经透镜汇聚后, $\Delta\varphi$ 仍较大, 能量利用率也很低.

激光的 $\Delta\varphi$ 在 $10^{-3} \sim 10^{-6}\text{rad}$, 激光定位、导向、测距等就利用了方向性好的特点. 现在用激光测量地球与月球之间的距离误差仅为厘米量级.

利用激光的方向性特点, 可提高导向和准直技术, 在探测海域、监测大陆板块的漂移、预报地震、高精度机械加工、基础建设、大型设备安装等领域广泛应用.

2. 能量集中, 亮度高

反映亮度高低的物理量是辐射亮度, 它表示光源从单位面积上向某方向单位立体角发射光的功率.

太阳表面的辐射亮度为: $2 \times 10^7 \text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{sr}$, 脉冲激光的辐射亮度为: $10^{22} \text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{sr}$, 相当于激光在百分之几的 mm^2 的范围内可产生几百万度高的温度和几百万个 atm 的压强, 这只有氢弹爆炸时的能量可以与之相比. 当然各种不同用途的激光可使用不同功率输出.

利用激光器的高能量可进行金属和非金属的加工、打孔、切割、焊接、引发核聚变、医疗上的手术刀等.

3. 单色性好

只有一个确定波长的光称为单色光, 量度单色光的物理量是谱线宽度 $\Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ 越小, 单色性越好; 对单色光, $\Delta\varphi \rightarrow 0$; 在普通光源中单色性最好的是氪灯, 它发出光的波长为 $l = 605.7\text{nm}$, $\Delta\lambda = 4.7 \times 10^{-1}\text{nm}$. 氦氖激光器的激光波长 $\lambda = 632.8\text{nm}$, $\Delta\lambda < 10^{-9}\text{nm}$, 可见激光的单色性比氪灯高近万倍.

单色性好使激光可以用作长度的精密测量、等离子体的测试、激光通讯、计量工作的标准光源等。

4. 相干性强

量度相干性程度的物理量是相干长度： $\Delta L_{\text{max}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ ， ΔL_{max} 越高，相干性越好。

对普通光源的钠灯： $\lambda_0 = 589.3\text{nm}$ ， $\Delta\lambda = 10^{-9}\text{nm}$ ， $\Delta L_{\text{max}} = 0.35\text{m}$ 。

对氦氖激光器： $\lambda = 632.8\text{nm}$ ， $\Delta\lambda = 10^{-9}\text{nm}$ ， $\Delta L_{\text{max}} = 4 \times 10^4\text{m}$ 。可见激光的相干性是普通光源的相干性的 10^5 倍。

利用激光的相干性好特点可以进行物理量的精密测量，如长度、孔径、角度、流速、温度、压力、电场强度、磁感应强度等等，测量精度达到 10^{-1} 米。

激光还被广泛地用于立体图像的存储、微缩、保存古籍及艺术品、激光照排、排版、印刷等方面。激光，从它诞生 30 多年来引起了巨大技术进步和科技发展，今后，激光还会为人类社会造更多的福。

四、自由电子激光器

按工作物质分：气体激光器、固体激光器、液体激光器、半导体激光器、自由电子激光器。按输出方式分：连续输出、脉冲输出。

自由电子激光器 (freeelectronlaser, FEL) 的工作物质是自由电子，其构成除核心部件——扭摆器外，还有电子枪、电子加速器、束流传输系统、光学谐振腔、电子束诊断装置等。电子束由电子枪发射出来经加速器加速至可与光速比拟的速度，进入谐振腔中的扭摆器。所谓“扭摆器”是由永磁铁或电磁铁构成的 N 极、S 极沿电子束方向(设沿 z 轴)交替变换的装置，它产生的磁感应场呈周期性变化。当电子束与激光同时通过扭摆器时，电子束在扭摆器静磁场洛伦兹力的作用下发生横向(设沿 y 轴)周期运动，这一横向运动又与光场的

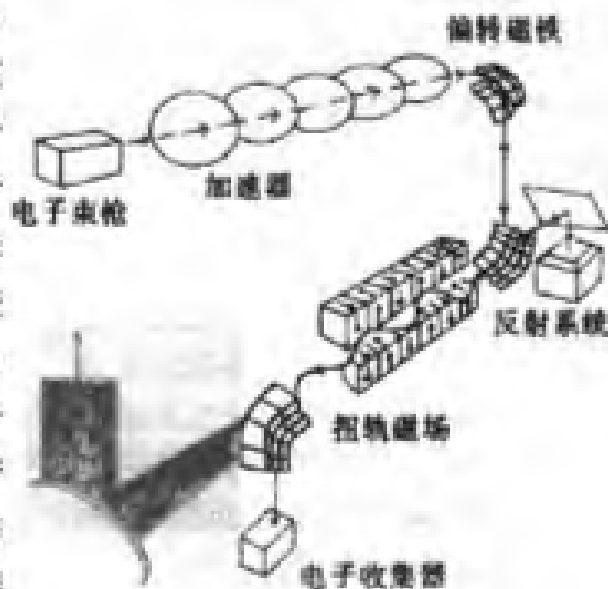


图 17.28 自由电子激发射图

磁分量相互作用产生轴向力:因为这个轴向力也是周期性的,电子在它驱动下便形成纵向群聚的团束,电子团束的光辐射与光场相干地叠加,当满足共振关系及其他条件时,激光光场从电子束中获取能量,实现受激光放大.

自由电子激光器有一般激光器难以与之相比的优点.

首先是波长连续可调.从共振关系式可以看到,自由电子激光波长取决于电子束能量和扭摆器的磁场强度和周期,只要调节3个参量中任1个,都能达到连续改变激光工作波长的目的.因此自由电子激光波长覆盖范围原则上可以从毫米波段一直到真空紫外,甚至软X射线波段.

其次是光束质量好,即方向性好、单色性好、亮度高.一般自由电子激光不存在工作物质温度升高引起的谱线增宽等现象,光束发散度可以接近衍射极限.

第三是精细而稳定的时间结构.光脉冲与电子束脉冲有着相同的时间结构.宏脉冲宽度一般为微秒量级,微脉冲宽度为皮秒量级,而且可以调节.

第四是效率高.电子束和光场的相互作用中,电子束能量除转换为激光能量外,仍然保存于电子束中,没有其他形式的能量耗散.

最后,输出功率高.目前实验上自由电子激光峰值功率可达吉瓦量级,平均功率达兆瓦量级.进一步提高激光能量输出仍有很大余地.

科学家们正在利用这种强有力的研究工具进行多方面的研究,如材料科学、化学技术、生物物理科学、医学应用、表面研究和固体物理研究.*FEL*在医学外科学中的研究进展非常迅速,主要集中在眼外科、牙外科、神经外科以及血管粥样硬化激光消融手术中.

思考题

17-1 什么是热辐射?什么是辐出度和单色辐出度?两个温度相同的同样物体A和B,若物体A周围环境温度较A的高,而物体B周围环境温度较B的低,试问物体A和B的辐出度是否相等?

17-2 什么是黑体?

17-3 一个不透明的红色物体,放在太阳光下为什么呈现红色?如升高它的温度并放于黑暗处,试问它将辐射什么颜色的光?

- 17-4 普朗克量子假设的内容是什么?它在物理学的发展中具有什么意义?
- 17-5 太阳表面发出的光近似于在 6000K 的黑体辐射,红巨星表面温度是高于还是低于 6000K?
- 17-6 同样材料制成的,半径为 r 的球、半球、边长为 r 的立方体各一个,都可视为黑体,具有相同的温度 T ,三者辐射功率哪个最大、哪个最小?
- 17-7 氢原子光谱的主要实验规律是什么?
- 17-8 玻尔理论的基本假设是什么?在推导轨道半径和能量公式时,还用到了哪几个经典物理公式?
- 17-9 氢原子处于第三激发态,试问它跃迁到哪个态时,(1) 辐射光具有的波长最长?(2) 辐射光的波长最短?(3) 吸收的光波具有最长的波长?
- 17-10 1996 年物理学家在加速器上成功的生产出反氢原子.这种原子由一个反质子和一个正电子构成.反质子和质子、正电子和电子的质量等都相等,只是电荷反号,在你看来,反氢原子的光谱结构与正常氢原子的光谱结构相同还是不同?
- 17-11 德布罗意波是什么波?什么是概率密度?概率密度和波函数有什么关系?
- 17-12 什么是波函数必须满足的标准条件?
- 17-13 波函数归一化是什么意思?
- 17-14 量子力学给出的势阱内的粒子在各处的概率和经典结论有何不同?关于粒子可能具有的能量二者给出的结论又有何不同?
- 17-15 什么叫势垒穿透?经典物理能解释这一现象吗?

习 题

- 17-1 求下述几种辐射的光子的能量、动量和质量:(1) $\lambda = 700\text{nm}$ 的红光;(2) $\lambda = 7.1 \times 10^{-2}\text{nm}$ 的 X 射线;(3) $\lambda = 1.24 \times 10^{-3}\text{nm}$ 的 γ 射线.
- 17-2 波长 $\lambda_0 = 0.01\text{nm}$ 的 X 射线与静止的自由电子碰撞.在与入射方向成 90° 角的方向上观察时,康普顿散射 X 射线的波长多大?反冲电子的动能和动量各如何?
- 17-3 试求(1) 氢原子光谱巴耳末线系辐射的、能量最小的光子的波长;(2)

巴耳末线系的线系极限波长.

17-4 计算电子经过 $U_1 = 100\text{V}$ 和 $U_2 = 10000\text{V}$ 的电压加速后的德布罗意波长 λ_1 和 λ_2 分别是多少?

17-5 计算质量 $m = 0.01\text{kg}$, 速率 $v = 300\text{m/s}$ 的子弹的德布罗意波长.

17-6 设子弹的质量为 0.01kg , 枪口的直径为 0.5cm , 试用不确定性关系计算子弹射出枪口时的横向速度.

17-7 原子的线度为 10^{-10}m , 求原子中电子速度的不确定量.

17-8 氦氖激光器所发红光波长为 $\lambda = 632.8\text{nm}$, 谱线宽度 $\Delta\lambda = 10^{-9}\text{nm}$, 试估算该原子态的寿命.

17-9 设原子的线度为 10^{-10}m , 原子核的线度为 10^{-11}m 数量级, 已知电子质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$, 质子的质量为 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$, 求电子在原子中的能量和质子在原子核中的能量.

17-10 证明: $\psi_n = \begin{cases} A \sin \frac{n\pi}{2a} x & (0 < x < a) \\ 0 & (x \geq a, x \leq 0) \end{cases}$ 式中的 $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

17-11 已知粒子在一维无限深势阱中的波函数为 $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi}{a})x$, 其中 a 为势阱宽度. 现有一粒子处在宽度为 20nm 的一维无限深势阱中, 则发现粒子在 $n = 3$ 状态时, 其概率最大的位置在哪里?

17-12 分别计算量子数 $n = 2, l = 1$ 和 $n = 2$ 的电子的可能状态数.

习题答案

第 10 章

$$10-1 \quad E = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$10-2 \quad 0$$

$$10-3 \quad F = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$10-4 \quad \Delta E_K > 0 \quad \Delta W < 0$$

$$10-5 \quad 6.64 \times 10^5 / \text{cm}^2$$

$$10-7 \quad (1) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$

$$(2) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad r \leq a$$

$$10-8 \quad (1)$$

$$E = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \quad r \geq a$$

$$U = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 \quad r \leq a$$

$$(2)$$

$$U = \frac{a^2 \rho}{4\epsilon_0} (2 \ln \frac{a}{r} - 1) \quad r \geq a$$

$$10-9 \quad (1) U_{AB} = 9.0 \times 10^4 \text{V} \quad (2) A_{AB} = 9 \times 10^{-4} \text{J}$$

第 11 章

$$11-1 \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (r < R_1)$$

$$E = 0, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_2)$$

- 11-2 $\pi\epsilon_0/\ln(d/a)$
 11-3 略
 11-4 $4.86 \times 10^{-12} F$
 11-5 串联 2:1, 并联 1:2
 11-6 15 千伏
 11-7 $C = \frac{q}{V}$
 11-8 $Q_1 = 0.50 \times 10^{-6} C, Q_2 = 1.5 \times 10^{-6} C$
 11-9 $\Delta W = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}, A_{外} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}, A_{外} = \Delta W$
 11-10 $\sigma_0 = \epsilon_0 \epsilon_r E$
 11-11 $\frac{2(\epsilon-1)Q^2 d}{(\epsilon+1)^2 \epsilon_0 a^3}$, 沿吸入介电板的方向
 11-12 $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$
 11-13 略

第 12 章

- 12-1 a $B = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{8R}$ 方向: 垂直纸面向外.
 b $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ 方向: 垂直纸面向里.
 c $B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\sqrt{2} - 1) + \frac{3\mu_0 I}{8R}$ 方向: 垂直纸面向里.
- 12-2 $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$
- 12-3 $B = B_r = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$
- 12-4 $B = 4B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$ 方向: 顺时针方向.
- 12-5 圆盘的磁矩 $m = \int dm = \int_0^R \sigma \omega r^3 dr = \frac{1}{4} \omega q R^2$
- 12-7 $B = \int dB = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 NI \sin^2 \theta d\theta}{\pi R} = \frac{\mu_0 NI}{4R}$
- 12-8 $B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega r dr}{2} = \frac{\mu_0 \omega R^2}{2} = \frac{\mu_0 \omega l}{2\pi R}$
- 12-9 $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a-b}{a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{c-a}{c-a-b}$

$$12-10 \quad F_{AB} = I_2 B b \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3} \mu_0 b I_1 I_2}{2\pi(a+b)}$$

$$F_{BC} = \int_a^{a+b} I_2 B dx = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$F_{CA} = \int dF_{CA} = \int_a^{a+b} \left\{ \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{\pi x} \right\} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_a^{a+b} \frac{\sqrt{3} \mu_0 I_1}{2\pi} \left(1 - \frac{a}{x}\right) dx = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I_1}{2\pi} (b - a \ln \frac{a+b}{a})$$

$$12-11 \quad \text{导体外一点的磁感应强度: } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

整个大圆柱体电流在轴线上的磁感应强度: $B_1 = 0$

$$12-12 \quad F_{AB} = \frac{\mu_0 a I^2}{2\pi b} \quad F_{CD} = \frac{\mu_0 a I^2}{2\pi(a+b)}$$

$$F_{BC} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \quad F_{DA} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$12-13 \quad \frac{q}{m} = \frac{2EI}{B^2 R^2}$$

$$12-14 \quad h = \frac{2\pi m q B}{v \cos \alpha}$$

$$12-15 \quad (1) \quad v = \frac{eB}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = 7.6 \times 10^6 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

(2) 即磁场 B 的方向与电子速度方向的夹角为 $\theta = 68.3^\circ$ 或 $\pi - 38.3^\circ = 111.7^\circ$.

$$12-16 \quad (1) v = 8.42 \times 10^{-2} (\text{m/s})$$

(2) $E_H = 0.1263 (\text{V/m})$ 方向沿 z 轴负向.

$$(3) U_H = 2.526 \times 10^{-2} (\text{V})$$

$$12-17 \quad M = \int dM = \int_0^{2\pi} IBR^2 \cos^2 \alpha d\alpha = IB\pi R^2$$

$$12-18 \quad (1) \text{线圈的磁矩为: } m = 1.0 \times 10^{-2} (\text{A} \cdot \text{m}^2)$$

磁矩的方向垂直于线圈平面, 与 I 成右手螺旋关系.

$$(2) J = 2.17 \times 10^{-3} (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$12-19 \quad \frac{\mathbf{F}}{dS} = iB_0 (-\mathbf{j}) = -\frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu_0} \mathbf{j}$$

$$12-20 \quad \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 - R^2}}\right)$$

$$12-21 \quad \text{炮弹受的作用力} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{D+R}{R}$$

$$12-22 \quad 0 < r < r_1, \quad H = \frac{I r}{2\pi r_1^2} \quad B = \frac{\mu_0 \mu_1 I r}{2\pi r_1^2} \quad \text{方向为顺时针}$$

$$r_1 < r < r_2 \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad \text{方向为逆时针}$$

$$r > r_2 \quad H = 0 \quad B = 0$$

12-23 (1) $H = 4 \times 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \quad B = 20 \text{ T}$

(2) $B' = 19.98 \approx 20 \text{ T}$

12-24 (1) $H = 100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \quad B_0 = 1.25 \times 10^{-4} \text{ T}$

(2) $B = 0.525 \text{ T} \quad B' \approx 0.525 \text{ T}$

第 13 章

13-1 $0.5\pi \cos 10\pi t \quad 1.57 \text{ V}$

13-2 $\left(\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{3}{4} \right) \frac{dI}{dt}$

13-3 $\frac{\mu_0 a \lambda}{2\pi R} \ln 2 \left| \frac{dv(t)}{dt} \right|$

13-4 $\frac{1}{2} \omega B L (L - 2r)$, 当 $L > 2r$ 时, 端点 A 处的电势较高.

13-5 1.5 V , 由 O 指向 A

13-6 (1) $\frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} \ln \frac{x+l_1}{x}, \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} v \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l_1} \right)$, 顺时针

(2) $\frac{\mu_0 l_2}{2\pi} I_0 \left[v \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l_1} \right) \sin \omega t - \omega \ln \frac{x+l_1}{x} \cos \omega t \right]$

13-8 (1) $-\frac{r}{2}, \frac{dB}{dt} (r < R), -\frac{R^2}{2r}, \frac{dB}{dt} (r > R)$, 逆时针;

(2) $-4.0 \times 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, 逆时针

13-9 $\frac{mgR \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta}$

13-10 (1) $\frac{B_0}{2\mu} r (0 \leq r \leq R)$

(2) $2.04 \times 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

13-11 $1.21 \times 10^3 \text{ 匝}$

13-12 (1) $2.26 \times 10^{-2} \text{ H}$

(2) -0.226 V , 当电流增加时, 自感电动势的方向与回路中电流 I 的方向相反

13-14 $\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1^2; \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1^2$

13-15 (1) $6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$

(2) $3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$ 和线圈 B 中电流方向相同

- 13-16 $\frac{\sqrt{3}\mu_0}{3\pi} \left[(b+h) \ln \frac{b+h}{b} - h \right]$
 13-17 (1) $3.28 \times 10^{-7} \text{ J}$ 4. $17 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ (2) $1.56 \times 10^{-4} \text{ s}$
 13-18 $\frac{\mu I^2}{16\pi}$
 13-19 $1.15 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
 13-20 100J

第 14 章

- 14-2 $5.47 \times 10^{-7} \text{ A}$
 14-3 $15.9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$
 14-5 $2.78 \text{ A}, \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \cdot \frac{dE}{dt} (r < R), 5.56 \times 10^{-6} \text{ T}$
 14-6 (1) 6.0; (2) 33.75 pF, $2.58 \times 10^{-4} \text{ H}$
 14-7 $\frac{d^2 U}{dt^2} + \Omega^2 U = 0$, 其中 $\omega = \sqrt{1/LC}$
 14-8 (1) 375m; (2) 3.62kW; (3) $2.85 \times 10^{-1} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ (-1), $7.56 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
 14-9 (1) $U = 100 \cos 2000\pi t \text{ V}, I = -1.57 \times 10^{-2} \sin 2000\pi t \text{ A}$
 (2) $E_r = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2 2000\pi t \text{ J}, E_m = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2 2000\pi t \text{ J}, E = 1.25 \times 10^{-4} \text{ J}$
 (3) 70.7V, $-1.11 \times 10^{-2} \text{ A}, 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}, 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}, 0, -1.57 \times 10^{-2} \text{ A}, 0, 1.25 \times 10^{-4} \text{ J}$
 14-10 $1.55 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}, 5.17 \times 10^{-6} \text{ T}$

第 15 章

- 15-1 5×10^6
 15-2 517.7nm, 绿色光
 15-3 $2\pi \frac{(n_2 - n_1)e}{\lambda}$
 15-4 $2.4 \times 10^3 \text{ m}$
 15-5 $8.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
 15-6 $8.0 \times 10^{-8} \text{ m}$
 15-7 (1) 24° ; (2) $5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}, 2.44 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 487.8 \text{ nm}$;
 (3) 0.112m, 0.114m

- 15-8 $1.44 \times 10^{-2} \text{m}$
- 15-9 正面 673.9nm, 404.3nm, 紫红色; 背面 505.4nm, 青绿色
- 15-10 673.1nm
- 15-11 592.1nm
- 15-12 560nm
- 15-13 (1)653.3nm; (2)653.3nm
- 15-14 99.6nm
- 15-15 (1) $4 \times 10^{-4} \text{rad}$; (2) $7.91 \times 10^{-4} \text{m}$; (3)152 条
- 15-16 略
- 15-17 $1.28 \times 10^{-5} \text{m}$
- 15-18 545.9nm
- 15-19 1.22
- 15-20 $1.50 \times 10^{-3} \text{m}$
- 15-21 102.77cm
- 15-22 1.00029
- 15-23 (1)600nm, 466.7nm; (2)3, 4; (3)7, 9
- 15-24 428.6nm
- 15-25 $3.0 \times 10^{-3} \text{m}, 5.7 \times 10^{-3} \text{m}, 2.7 \times 10^{-3} \text{m},$
 $2.0 \times 10^{-2} \text{m}, 3.8 \times 10^{-2} \text{m}, 1.8 \times 10^{-2} \text{m}$
- 15-26 $1.266 \times 10^{-6} \text{m}$; 7899 条; 衍射角为 $\frac{\pi}{2}$, 不可能
- 15-27 $1.03 \times 10^{-6} \text{m}$, 不出现, 467.6nm, 第 2 级
- 15-28 $2.4 \times 10^{-6} \text{m}, 8.0 \times 10^{-7} \text{m}$
- 15-29 8.94km
- 15-30 51.8m
- 15-31 17.46° 36.87°
- 15-32 $2.25I_1$
- 15-33 偏振光 $\frac{2}{3}$, 自然光 $\frac{1}{3}$

第 16 章

- 16-1 $t'_1 = 1.25 \times 10^{-7} \text{s}$
- 16-2 $x = 93\text{m}, y = 0, z = 0, t = 2.5 \times 10^{-7} \text{s}$
- 16-3 $t'_2 - t'_1 = -9.26 \times 10^{-14} \text{s}$

16-4 $v = 0.5(c)$

16-5 $5.77 \times 10^{-3} \text{s}$

16-6 $0.6a^2$

16-7 5 倍

16-8 $\frac{c}{K} \sqrt{K^2 - 1}$

16-9 $E_0 = 0.512 \text{MeV}; E_k = 4.488 \text{MeV}; p = 2.66 \times 10^{-21} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}; v = 0.995c$

第 17 章

17-1 (1) $E = 1.78 \text{eV}, p = 9.47 \times 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, m = 3.16 \times 10^{-36} \text{kg}$

(2) $E = 1.75 \times 10^4 \text{eV}, p = 9.34 \times 10^{-24} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, m = 3.11 \times 10^{-32} \text{kg}$

(3) $E = 1.00 \times 10^6 \text{eV}, p = 5.35 \times 10^{-22} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, m = 1.78 \times 10^{-30} \text{kg}$

17-2 $0.0124; \text{nm}; E_k = 3.8 \times 10^{-15} \text{J}; (2.1 \times 10^4 \text{eV});$

$p = 8.5 \times 10^{-23} (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}); \theta = 38^\circ 44'$

17-3 (1) $\lambda = 655.7 (\text{nm}); (2) \lambda_2 = 347.4 (\text{nm})$

17-4 $\lambda_1 = 0.123 \text{nm}; \lambda_2 = 0.0123 \text{nm}$

17-5 $\lambda = 2.21 \times 10^{-34} (\text{m})$

17-6 $\Delta v_x \geq 1.05 \times 10^{-3} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$

17-7 $\Delta v_x \geq 0.5468 \times 10^9 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$

17-8 $\Delta t \geq 1.062 \times 10^{-4} \text{s}$

17-9 $E_{1e} = 37 \text{eV}, E_{2e} = 148 \text{eV}; E_{1p} = 2 \text{MeV}, E_{2p} = 8 \text{MeV}$

17-11 $3.33 \text{nm}, 10 \text{nm}, 16.67 \text{nm}$ 处发现粒子出现的概率最大.

17-12 6:8

